
Cartographie de l'ensemble des convexes 3D

Les mesures de Minkowski

Isabelle Blasquez, Pierre Fournier & Jean-François Poiraud

*IUT du Limousin – Université de Limoges
LICN, départements Informatique, Génie mécanique et Mesures physiques
Allée André Maurois, Limoges CEDEX*

*isabelle.blasquez@unilim.fr ; pierre.fournier@unilim.fr ;
jean-francois.poiraud@unilim.fr*

Sections de rattachement : 27, 60 & 61

Secteur : Secondaire

RÉSUMÉ. Parmi les mesures d'objets 3D convexes, les fonctionnelles de Minkowski ont des propriétés mathématiques établies rigoureusement et qui correspondent à des hypothèses physiques réalistes. Dans cette communication nous montrons que les fonctionnelles de Minkowski peuvent être calculées de deux manières différentes, par dilatation d'une part et d'autre part par union et intersection d'objets de forme canonique. Le diagramme de Blaschke par projection de l'ensemble des convexes sur le carré unité permet de comparer les formes d'objets 3D.

MOTS-CLÉS : Ensembles convexes, fonctionnelles de Minkowski, mesures d'objets 3D, morphologie mathématique.

1. Introduction

Comment caractériser la forme d'un objet et des modifications de sa frontière dues à des contraintes extérieures ? Avant de répondre à cette question, il s'agit tout d'abord de savoir comment mesurer une forme à l'aide de quelques mesures fondamentales. Dans le domaine de la reconnaissance de formes, de très nombreux indicateurs ont été définis sans que leurs propriétés soient étudiées de manière systématique. Parmi les mesures d'objets 3D convexes, les fonctionnelles de Minkowski dont des propriétés mathématiques établies rigoureusement et qui correspondent à des hypothèses physiques réalistes (additivité, invariance dans les déplacements rigides, insensibilité aux grossissements, robustesse par rapport à des modifications de leurs frontières). Dans cette communication nous montrons que l'on peut calculer les mesures fondamentales d'objets obtenus par union et intersection d'objets canoniques. Nous prenons l'exemple d'un

tronc de cône dont nous obtenons, sans calcul intégral, les fonctionnelles. Le diagramme de Blaschke, par projection de l'ensemble des convexes sur le carré unité, permet de comparer les formes d'objets 3D. En plaçant des représentants des troncs de cône dans le diagramme de Blaschke nous complétons ainsi la cartographie de l'espace des convexes.

2. Rapide état de l'art sur les mesures

La géométrie d'un objet peut être considéré en termes de taille et de forme. On peut distinguer des descripteurs basés sur des facteurs de taille et des facteurs de forme adimensionnels selon Taylor (Taylor).

2.1. Descripteurs de taille

Les mesures géométriques métriques classiques dépendent explicitement de la taille. Ce sont le volume, l'aire et la largeur moyenne. Les paramètres de taille définissent pour un objet un diamètre équivalent à celui d'une sphère possédant les mêmes caractéristiques physiques : par exemple la boule ayant même volume que l'objet ou la boule ayant même aire que l'objet.

2.2. Descripteurs de forme sans dimension

Ils permettent de décrire des caractéristiques d'un objet à l'aide d'indices. Par exemple, la compacité est définie comme le rapport entre le cube de l'aire et le carré du volume. Cet indicateur est minimum pour la boule. En définissant les trois diamètres principaux d'un objet, on définit un ellipsoïde qui peut être oblate, prolate ou sphérique. On peut ainsi calculer un indicateur de sphéricité qui compare ces trois diamètres.

2.3. Limites de ces facteurs.

La variété des descripteurs de taille ou de forme présentés dans la littérature, dont nous n'avons présenté ici qu'un petit nombre, tient au fait qu'ils peuvent être définis en fonction d'une application précise. Cependant rarement sont explicitées les propriétés de ces mesures. Grâce à des résultats élaborés dans le cadre de la géométrie intégrale (Hadwiger) et de la morphologie mathématique (Serra), des physiciens ont commencé à utiliser quatre mesures, rigoureusement définies, pour étudier des phénomènes aussi bien à l'échelle microscopique qu'à l'échelle des galaxies (Sheth).

3. Les quatre mesures de Minkowski

Un ensemble X est dit convexe si quels que soient x et y appartenant à X , le segment $[x, y]$ appartient à X .

Les quatre mesures de Minkowski (dites aussi fonctionnelles de Minkowski ou volumes intrinsèques) s'appliquent à des objets convexes et sont respectivement le volume (V), l'aire (S), l'intégrale de la largeur moyenne (M) et la caractéristique d'Euler-Poincaré (χ).

Les deux premières sont bien connues et sont homogènes respectivement à une longueur au cube et une longueur au carré. La troisième (M) est d'usage moins connu, elle est homogène à une longueur. La quatrième mesure (χ) permet de rendre compte pour un objet isolé de ses cavités et de ses tunnels ; elle est de nature topologique. Ces mesures possèdent cinq propriétés mathématiques qui ont chacune une interprétation physique réaliste. Ces quatre mesures, notées génériquement φ , vérifient les propriétés suivantes

- C-additivité : $\varphi(K_1 \cup K_2) = \varphi(K_1) + \varphi(K_2) - \varphi(K_1 \cap K_2)$ K_1 et K_2 étant deux convexes (le volume de l'union de deux convexes égale la somme des volumes des convexes diminuée du volume de l'intersection)

- invariance dans les déplacements rigides (translations et rotations) $\varphi(gK) = \varphi(K)$, g étant un mouvement rigide dans l'espace,

- m-homogénéité : $\varphi(cK) = c^m \varphi(K)$, pour $c > 0$ et $0 \leq m \leq 3$ (autonomie par rapport aux grossissements)

- continuité : $\varphi(K_i) \rightarrow \varphi(K)$ lorsque $K_i \rightarrow K$, K et K_i étant des convexes (robustesse par rapport à de petites variations)

- croissance : $\varphi(K_1) \leq \varphi(K_2)$ si $K_1 \subseteq K_2$

Les trois premières fonctionnelles sont stéréologiques, c'est à dire qu'elles peuvent être obtenues comme fonction de mesures sur \mathbf{R}^2 ou sur \mathbf{R}^1 . Pour obtenir le volume, l'aire et la largeur moyenne, il suffit d'échantillonner respectivement par des points, des droites et des plans. Hadwiger a montré que toute mesure qui satisfait à ces cinq conditions peut être écrite comme une combinaison linéaire des quatre fonctionnelles de Minkowski ; il est donc inutile d'essayer de définir d'autres mesures qui posséderaient les cinq propriétés précédentes.

Il est possible d'étendre ces résultats, avec des propriétés légèrement affaiblies, à l'union finie de convexes, ce qui permet de calculer les mesures de Minkowski de tableaux de voxels (ou de pixels) obtenues par exemple par des scanners. Nous avons montré (Blasquez) qu'en utilisant un algorithme basé sur les diagrammes de décisions binaires, le calcul des fonctionnelles peut être effectué 17 fois plus rapidement que l'algorithme standard présenté jusque là dans la littérature (Michielsen et De Raedt). Cet algorithme a été utilisé récemment pour caractériser des copolymères (Zvelindovsky) et

nous l'utilisons à titre expérimental pour caractériser des échantillons d'os atteints d'ostéoporose.

4. La formule de Steiner

Les 4 fonctionnelles de Minkowski généralisent au cas de surfaces présentant des arêtes ou des sommets, des résultats bien connus de géométrie différentielle faisant intervenir des intégrales dépendant des courbures, et donc définies pour des surfaces régulières. La formule de Steiner montre la relation entre les fonctionnelles de Minkowski d'un ensemble convexe compact X et son dilaté par une boule B de rayon r . Le dilaté est obtenu en disposant le centre de la boule sur tous les points de X . On obtient un ensemble X_r , dit ensemble parallèle, $X_r = \{x \in R / d(x, X) \leq r\}$

La formule de Steiner donne l'expression du volume de X_r en fonction des fonctionnelles de l'ensemble X d'origine :

$$V(X_r) = V(X) + S(X)r + M(X)r^2 + \frac{4\pi}{3}r^3$$

Dans tous les cas, la mesure du dilaté est une fonction polynomiale de la taille de la boule. Le degré du polynôme est égal à la dimension de l'objet. Dans le cas d'un polyèdre :

- le terme en r est le volume des parallélépipèdes de hauteur r et dont l'aire des bases est égal à l'aire de chacune des faces du polyèdre.
- le terme en r^2 est la somme des volumes des secteurs cylindriques construits sur chaque arête et de rayon r .
- le terme en r^3 est la somme des volumes des secteurs sphériques construits sur chaque sommet et de rayon r .

En dérivant le volume de X_r par rapport à r , on obtient l'aire comme la mesure superficielle de la frontière de X , $S(X_r) = S(X) + 2M(X)r + 4\pi r^2$. De même en dérivant de nouveau par rapport à r , on obtient la largeur moyenne, $M(X_r) = M(X) + 4\pi r$ à un coefficient près.

5. Le diagramme de Blaschke

Il est depuis longtemps connu que parmi tous les convexes compacts de l'espace de volume donné, celui dont l'aire est la plus petite est la boule ayant ce volume. Ce qui conduit à l'inégalité (faible) isopérimétrique : $S^3 - 36\pi V^2 \geq 0$ (1). Trois autres relations peuvent être obtenues : $S^2 - 3MV \geq 0$ (2), $M^2 - 4\pi S \geq 0$ (3) et $M^3 - 48\pi S^2 \geq 0$ (4) Un résumé de ces 4 inéquations peut être obtenu en associant à chaque convexe, caractérisé par ces

mesures V , S et M un point du plan de coordonnées $x=4\pi S/M^2$, $y=48\pi^2 V/M^3$. La classe de tous les convexes de l'espace \mathbf{K} est transformée en un ensemble plan de points \mathbf{K} . Les deuxième et quatrième relations se traduisent par : $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$. Il est facile de constater que l'application ainsi construite de \mathbf{K} dans \mathbf{K} associe tous les convexes de même forme mais de taille différentes au même point du diagramme. Ainsi le point $(1,1)$ sera associé à toutes les boules quelque soit leur rayon. La courbe $y=x^2$ est une frontière du carré $[0, 1] \times [0, 1]$. Le segment reliant les points $(0,0)$ et $(0, 8/\pi^2)$ en est une autre. La troisième courbe frontière n'est pas encore déterminée. Malheureusement des convexes de formes différentes peuvent correspondre à un même point du diagramme. Les points du diagramme proches du point $(0,0)$ correspondent à des objets de forme filamenteuse. Les points d'ordonnées nulles correspondent à des objets convexes 2D. Les points proches de $(0, 8/\pi^2)$ correspondent à des objets plats.

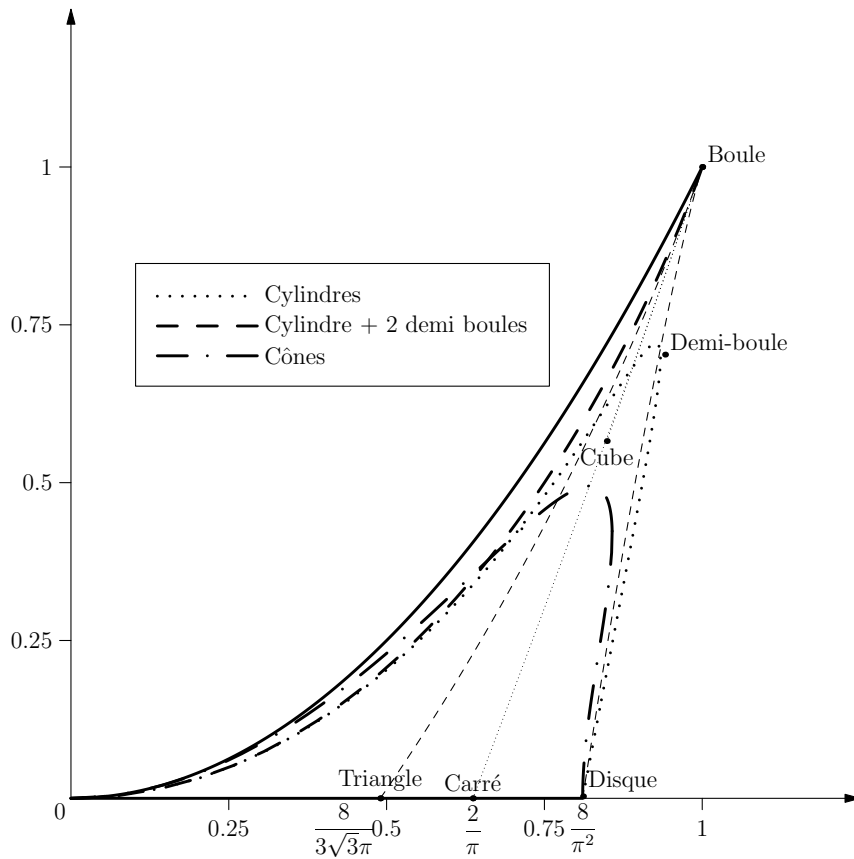
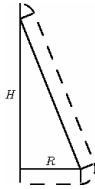


Figure 1 Diagramme de Blaschke

6. Fonctionnelles d'un cône



On considère un cône de hauteur H et de base circulaire de rayon R . Les fonctionnelles d'un tel cône peuvent être obtenues par l'expression du volume du dilaté de ce cône par la boule de rayon r en appliquant la formule de Steiner. L'objet résultant de cette dilatation s'obtient par la rotation de l'objet représenté sur la figure de gauche, autour de l'axe vertical.

L'expression du volume du dilaté s'écrit, en fonction du rayon r de la boule :

$$V(r) = \frac{\pi R^2 H}{3} + \pi R^2 \left(1 + \frac{\sqrt{H^2 + R^2}}{R} \right) r + \pi R \left(\frac{\pi}{2} + \text{Arc tan} \left(\frac{H}{R} \right) \right) r^2 + \frac{4\pi}{3} r^3$$

Les coefficients de ce polynôme en r correspondent au volume du cône, la surface extérieure, l'intégrale de la largeur moyenne et à $4\pi/3$ fois la constante d'Euler, cette dernière valant 1 pour un convexe.

7. Fonctionnelles d'un tronc de cône

Les fonctionnelles de Minkowski (volume V , surface S et intégrale de la largeur moyenne M) d'un cône sont données dans le paragraphe précédent, l'additivité de ces fonctionnelles permet d'obtenir les fonctionnelles d'un tronc de cône.

En effet, considérons un cône C_0 , de hauteur H et de base circulaire de rayon R . Coupons ce cône, parallèlement à sa base de manière à obtenir un cône C_1 de hauteur λH et de base circulaire de rayon λR et un tronc de cône TC de bases de rayons R et λR , avec $0 < \lambda < 1$.

On a $C_1 = C_0 \cup TC$. Si φ est une fonctionnelle alors on a

$$\varphi(TC \cup C_1) = \varphi(TC) + \varphi(C_1) - \varphi(TC \cap C_1)$$

où $TC \cap C_1$ est le disque de rayon λR .

7.1. Calcul du volume V

La relation d'additivité donne $V(TC \cup C_1) = V(TC) + V(C_1) - V(TC \cap C_1)$ avec $V(TC \cap C_1) = 0$ puisque le volume d'un disque est nul. On a

$$V(TC \cup C_1) = V(C_0) = \frac{1}{2} \pi H R^2 \qquad V(C_1) = \frac{1}{2} \pi H \lambda^3 R^2$$

On obtient

$$V(TC) = \frac{1}{2} \pi H (1 - \lambda^3) R^2$$

7.2. Calcul de la surface S

La relation d'additivité donne $S(TC \cup C_1) = S(TC) + S(C_1) - S(TC \cap C_1)$ avec $S(TC \cap C_1) = 2\pi(\lambda^2 R^2)$. L'intersection $TC \cap C_1$ correspond au disque de rayon λR . Il est nécessaire de tenir compte des deux faces de ce disque pour le calcul de la surface, l'une appartenant à TC et l'autre à C_1 . On a :

$$S(TC) = \pi R^2 \left[(1 - \lambda^2) \sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2}} + (1 + \lambda^2) \right]$$

7.3. Calcul de l'intégrale de la largeur moyenne M

La relation d'additivité donne $M(TC \cup C_1) = M(TC) + M(C_1) - M(TC \cap C_1)$ avec $M(TC \cap C_1) = \pi^2 \lambda R$. L'intersection $TC \cap C_1$ correspond au disque de rayon λR dont il faut tenir compte des deux faces pour le calcul de l'intégrale de la largeur moyenne. On a

$$M(TC) = \pi R \left[\pi + (1 - \lambda) \left(\frac{H}{R} - \text{Arctan} \left(\frac{H}{R} \right) \right) \right]$$

Avec h la hauteur du tronc de cône et H la hauteur du cône initial, on a

$$H = \frac{h}{1 - \lambda}$$

On peut donc écrire :

$$V(TC) = \frac{1}{2} \pi h (1 + \lambda + \lambda^2) R^2$$

$$S(TC) = \pi R^2 \left[(1 - \lambda^2) \sqrt{1 + \frac{h^2}{(1 - \lambda)^2 R^2}} + (1 + \lambda^2) \right]$$

$$M(TC) = \pi R \left[\pi + (1 - \lambda) \left(\frac{h}{(1 - \lambda) R} - \text{Arctan} \left(\frac{h}{(1 - \lambda) R} \right) \right) \right]$$

8. Conclusion

La propriété d'additivité des mesures de Minkowski possède une interprétation physique réaliste. Leur calcul ne nécessite pas d'hypothèses de régularité des surfaces frontières et repose sur des considérations purement géométriques. La projection de l'espace des convexes sur le carré unité permet une cartographie de l'espace des convexes. Bien que les mesures de Minkowski soient utilisées en pratique sur des tableaux de voxels, la détermination de mesures de formes canoniques continues dans l'espace et de leur intersection ou de leur union permet de caractériser le biais dû à l'échantillonnage de formes réelles.

Les fonctionnelles de Minkowski constituent un outil supplémentaire en matière de caractérisation d'images. L'extension de leurs propriétés aux unions finies de convexes autorise des mesures sur des images 3D numériques et complètent l'arsenal existant des outils d'exploitation des images. L'interprétation physique naturelle de ces fonctionnelles a permis leur application dans de nombreux domaines de la physique.

Bibliographie

Blasquez I. et Poirauudeau J.-F., « Comment dénombrer le nombre de faces, arêtes, sommets pour un objet 3D discrétisé de manière optimale ». Colloque National de la Recherche en IUT, CNR'IUT 2003, Tarbes, 15-16 mai 2003.

Hadwiger H., « Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie », Springer-Verlag, Heidelberg, 1957 .

Michielsen K., Raedt (De), « Integral-Geometry Morphological Image Analysis, Physics Reports », 347, 2001.

Poirauudeau J.-F. et Blasquez I., 2003, « Minkowski Functionals and Analysis of Sets of Voxels », Eighth SIAM Conference on Geometric Design and Computing, Seattle (WA), 10-13 novembre 2003.

Taylor M., « Quantitative measures for shape and size particles », Powder Technology, 124, 2002

Sheth V, 2002, « Measuring the Geometry and Topology of Large Scale Structure using »

Zvelindovsky, A. V. and all., « Three-dimensional mesoscale dynamics of block copolymers under shear : The dynamic density-functional approach », Phys. Rev. E, 57, 1998.