

Étude morphologique de formes 3D discrètes à l'aide des  
fonctionnelles de Minkowski

30 juin 2003

## *Remerciements*

J'adresse mes plus vifs remerciements et exprime mes sentiments de reconnaissance à : Monsieur Richard BERLAND, Professeur à l'Université de Limoges, Directeur du Laboratoire d'Informatique pour la Commande Numérique, pour la qualité de l'accueil qu'il m'a réservé et la sympathie qu'il m'a témoignée à mon arrivée et lui exprime également en cette occasion mon profond respect.

Mon encadrant Monsieur Jean-François POIRAUDEAU, Maître de conférence à l'Université de Limoges, pour son assistance, ses précieux conseils et l'apport de son inestimable expérience ainsi que son savoir qui m'ont beaucoup aidé à rédiger mon mémoire. Qu'il trouve là l'expression de ma profonde gratitude.

Mademoiselle Isabelle BLASQUEZ pour son aide et sa disponibilité qui ont contribué à me rendre la tâche moins difficile.

Monsieur Dimitri PLEMENOS, Professeur à l'Université de Limoges, qui a accepté d'examiner ce travail et de participer à ce jury.

Messieurs Daniel TEXIER et Serge ROUX pour leur agréable accueil.

À tous les membres de ma famille pour leurs soutiens et leurs encouragements.

Encore une fois, merci à tous .

# Table des matières

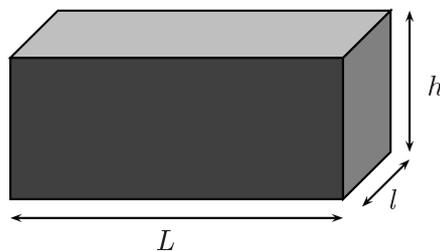
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Aspect théorique de la géométrie intégrale</b>	<b>7</b>
1.1 Opérations de Minkowski (addition , soustraction)	7
1.2 Ensembles parallèles	8
1.2.1 Les ensembles parallèles en 1D :	8
1.2.2 Les ensembles parallèles en 2D :	9
1.2.3 Les ensembles parallèles en 3D :	11
1.3 Les fonctionnelles de Minkowski et les ensembles convexes	12
1.3.1 Définitions	12
1.3.2 La formule de Steiner	12
1.3.3 Les propriétés des fonctionnelles de Minkowski	13
1.3.4 Théorème de Hadwiger	15
1.3.5 L’anneau convexe	15
<b>2 Aspect Calculatoire</b>	<b>17</b>
2.1 Les fonctionnelles de Minkowski et les corps ouverts	17
2.1.1 Calcul des fonctionnelles de Minkowski pour un pixel (2D) :	17
2.1.2 Calcul des fonctionnelles de Minkowski pour un voxel (3D) :	18
2.2 Application à des images binaires :	20
2.2.1 Cas d’une image binaire 2D :	20
2.2.2 Cas d’une image binaire 3D :	22
2.3 Énumération des éléments géométriques de base	23
2.3.1 Algorithme de base proposé par Michielsen et De Raedt	23
2.3.2 Algorithme de calcul des $n_m(\mathcal{P})$ en 2D	24
2.3.3 Algorithme de calcul des $n_m(\mathcal{P})$ en 3D	28
2.3.4 Limites de l’algorithme de Michielsen et De Raedt	30
2.3.5 Algorithme amélioré de calcul des $n_m(\mathcal{P})$ en 3D	30
2.3.5.1 Introduction	30
2.3.5.2 Réduction du problème	32
2.3.5.3 Implémentation : utilisation d’un triple-ADD	33

<b>Conclusion</b>	<b>35</b>
<b>Annexe 1 : Termes <math>a_i</math> de l'équation <math>\Delta n_1</math> en 3D</b>	<b>37</b>
<b>Annexe 2 : Termes <math>s_i</math> de l'équation <math>\Delta n_0</math> en 3D</b>	<b>39</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>40</b>

# Introduction

De très importants volumes de données, souvent obtenus à partir d'images, sont utilisés dans de nombreux domaines scientifiques. Un des buts principaux de l'analyse d'image est de fournir une caractérisation quantitative de la forme et de la connectivité des constituants [1]. La caractérisation des formes 3D à l'aide de quatre mesures [2] est un des domaines de la morphologie mathématique. Ces mesures, appelées aussi fonctionnelles de Minkowski sont respectivement :

1. le volume ( $V$ ).
2. la surface ( $S$ ).
3. la largeur moyenne ( $B$ ).
4. la caractéristique d'Euler-Poincaré ( $\chi$ ).



Volume	$V(K) = L \times l \times h$
Surface	$S(K) = 2 \times (Ll + Lh + lh)$
Largeur Moyenne	$B(K) = \frac{L + l + h}{2}$
Caractéristique d'Euler-Poincaré	$\chi(K) = 1$

FIG. 1 – Les fonctionnelles de Minkowski pour un parallélépipède rectangle plein

Par exemple, les valeurs des fonctionnelles de Minkowski pour un parallélépipède rectangle plein ( $K$ ) de longueur  $L$ , de largeur  $l$  et de hauteur  $h$  (Figure 1) sont :  $V = Llh$ ,  $S = 2(Ll + Lh + lh)$ ,  $B = (L + l +$

$h)/2, \chi = 1$ .

La notion de largeur moyenne est peu connue. Cependant elle est utilisée sans être nommée depuis longtemps par la poste pour dimensionner les colis. Un colis est dit standard si  $L + l + h < 100cm$ , de  $100cm$  à  $150cm$  il est qualifié de volumineux.  $\chi$  est un invariant topologique qui vise à décrire la morphologie des ensembles en fonction de leur connexité et de l'existence de cavité ou de tunnels. Une cavité incrémenterait  $\chi$  de 1, un tunnel décrémenterait  $\chi$  de 1.

Au cours de ces dernières années, ces fonctionnelles ont été largement utilisées dans des nombreux domaines qui vont de la détermination des très grandes structures de l'univers [3] à la modélisation des milieux poreux [4].

# Chapitre 1

## Aspect théorique de la géométrie intégrale

### 1.1 Opérations de Minkowski (addition , soustraction)

La somme de Minkowski (ou somme vectorielle) de deux ensembles quelconques  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}^n$  est définie par :

$$A \oplus B = \{a + b : a \in A \text{ et } b \in B\}. \quad (1.1)$$

La somme de Minkowski peut être vue comme la projection du produit cartésien des ensembles. Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles quelconques de  $\mathbb{R}^n$ , leur somme peut s'écrire :

$$A \oplus B = \Pi(A \times B). \quad (1.2)$$

où

$$A \times B = (a, b) / a \in A, b \in B \quad (1.3)$$

et

$$\Pi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ telle que } \Pi(a, b) = a + b. \quad (1.4)$$

L'addition de Minkowski  $\oplus$  est l'opération qui consiste à translater chaque point de  $A$  par chaque élément de  $B$ , le regroupement de tous les points génère un nouvel ensemble de points (Figure 1.1).

La soustraction de Minkowski de deux ensembles quelconques  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}^n$  est définie par :

$$A \ominus B = \{a + b : a \in A \text{ et } b \in B \text{ et } a \cap b \neq \emptyset\}. \quad (1.5)$$

Ce qui revient à translater chaque point  $a \in A$  par chaque élément  $b \in B$  et à ne prendre en considération que les points d'intersection.

L'addition (respectivement la soustraction) de Minkowski augmente (respectivement diminue) le nombre de points d'un ensemble. À moins que  $B$  ne contienne l'ensemble original, l'ensemble  $A \ominus B$  n'est pas nécessairement un sous ensemble de  $A$ . Pour un élément structurant  $B$ , l'opérateur  $\delta_B : A \mapsto A \oplus B$  de transformation est appelé la dilatation par  $B$  et a comme effet de "gonfler" l'ensemble  $A$ , l'opérateur  $\varepsilon_B : A \mapsto A \ominus B$  de transformation est appelé l'érosion par  $B$  et a comme effet de "dégonfler" l'ensemble  $A$ . La soustraction  $A \ominus B$ , de Minkowski, de  $A$  par  $B$  est l'érosion adjointe de  $A \oplus B$ . L'addition et la soustraction de Minkowski jouent un grand rôle dans le traitement morphologique d'image.

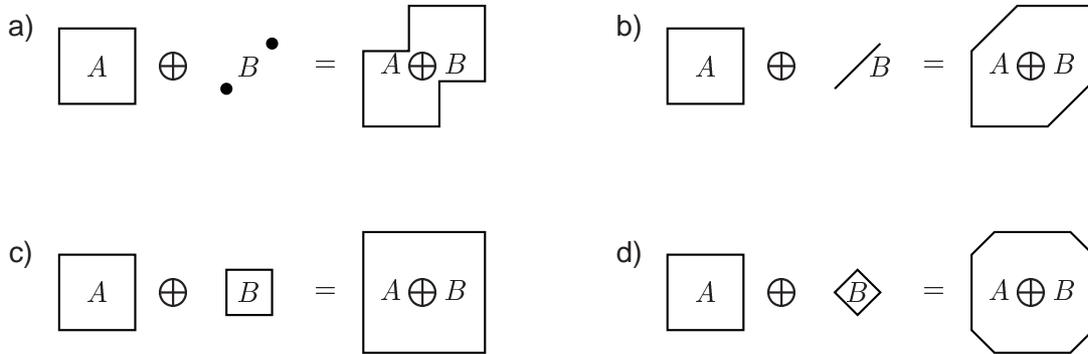


FIG. 1.1 – Exemples de l'addition de Minkowski. a) L'addition de Minkowski d'un carré et d'une paire de points et l'union de ce carré et du carré décalé. Comme la paire de points n'est pas un ensemble convexe, la somme de Minkowski n'est pas non plus convexe. b) Comme un segment est convexe, la somme de Minkowski d'un carré et d'un segment est un ensemble convexe. c) Si  $A$  est un carré de longueur 1 et  $B$  est un carré de longueur  $c$  alors la somme de Minkowski est un carré de longueur  $1 + c$ . d) La somme de Minkowski dépend de l'orientation de l'élément structurant  $B$

## 1.2 Ensembles parallèles

Dans un espace euclidien  $\mathcal{E}$ , l'ensemble parallèle  $A_r$  de l'ensemble  $A$  est défini comme suit :

$$A_r = A \oplus S_r^{(d)} \quad (1.6)$$

où  $S_r^{(d)}$  représente une boule de rayon  $r$  en dimension  $d$ .

### 1.2.1 Les ensembles parallèles en 1D :

Dans un espace euclidien  $\mathcal{E}$  à une dimension, considérons un ensemble de points d'une ligne  $L$  de longueur  $a$ . On prend un segment similaire  $S_r^{(1)}$  de longueur  $2r$  et on met le centre de ce segment sur chaque point de la ligne  $L$ . Le résultat de l'union de tous les points est un autre segment  $L_r$  plus long que  $L$  (Figure 1.2).



FIG. 1.2 – Ensemble parallèle d'un segment  $L$  de longueur  $a$  à une distance  $r$  en dimension 1

En terme des opérations de Minkowski :  $L_r = L \oplus S_r^{(1)}$

- L'ensemble  $L_r$  est l'ensemble parallèle de l'ensemble  $L$  à une distance  $r$ .
- La longueur de l'ensemble  $L_r$  est définie par :

$$l(L_r) = a + 2r = l(L) + 2r. \quad (1.7)$$

Ce concept peut s'étendre à deux ou à trois dimensions.

### 1.2.2 Les ensembles parallèles en 2D :

Dans un espace euclidien à deux dimensions, considérons les exemples suivants :

- un disque circulaire de rayon  $a$  que nous notons  $D$  (Figure 1.3).
- un carré de côté  $a$  que nous notons  $Q$  (Figure 1.4).
- un triangle équilatéral de côté  $a$  que nous notons  $T$  (Figure 1.5).

On prend un disque  $S_r^{(2)}$ , on met le centre du disque sur chaque point des ensembles  $D, Q, T$ . Les résultats de l'union de tous les points sont les ensembles parallèles  $D_r, Q_r, T_r$ .

- La surface de l'ensemble parallèle  $D_r$  est définie par :

$$U(D_r) = \pi(a + r)^2 \quad (1.8)$$

où  $(a + r)$  est le rayon de l'ensemble parallèle  $D_r$ . En développant, nous obtenons :

$$U(D_r) = \pi a^2 + 2\pi ar + \pi r^2 \quad (1.9)$$

où  $\pi a^2$  (respectivement  $2\pi a$ ) est la surface (respectivement le périmètre) de l'ensemble original  $D$  (disque de rayon  $a$ ).

- La surface de l'ensemble parallèle  $Q_r$  est définie par :

$$U(Q_r) = a^2 + 4ar + \pi r^2 \quad (1.10)$$

où  $a^2$  (respectivement  $4a$ ) est la surface (respectivement le périmètre) de l'ensemble original  $Q$  (carré de côté  $a$ ).

- La surface de l'ensemble parallèle  $T_r$  est définie par :

$$U(T_r) = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + 3ar + \pi r^2 \quad (1.11)$$

où  $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$  (respectivement  $3a$ ) est la surface (respectivement le périmètre) de l'ensemble original  $T$  (triangle équilatéral).

Les formules (1.9), (1.10), (1.11) suggèrent une relation entre la surface de l'ensemble original et la surface de son ensemble parallèle à une distance  $r$ . Les surfaces des trois ensembles parallèles précédents  $K_r$  peuvent se généraliser sous la forme d'un polynôme en fonction de  $r$  et de l'ensemble original  $K$  :

$$U(K_r) = U(K) + P(K)r + \pi r^2 \quad (1.12)$$

où  $U(K)$  (respectivement  $P(K)$ ) correspond à la surface (respectivement au périmètre) de l'ensemble original  $K$ , remarquons que le terme du plus grand degré du polynôme  $U(K_r)$  correspond à la surface de l'élément structurant (disque). La surface du disque  $S_r^{(2)}$  est égale à  $\pi r^2$ .

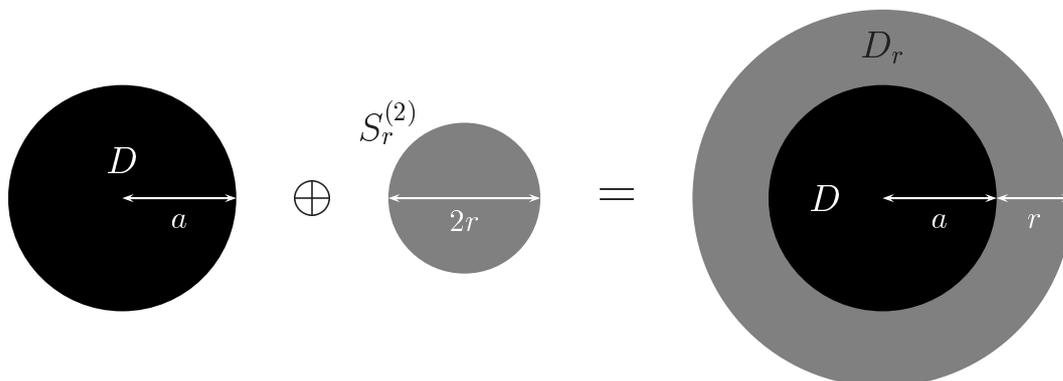


FIG. 1.3 – Ensemble parallèle d'un disque circulaire  $D$  de rayon  $a$  à une distance  $r$  en dimension 2

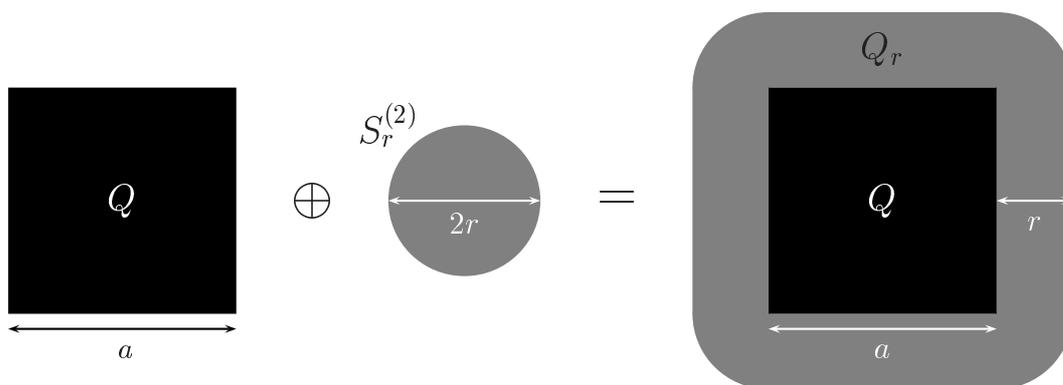
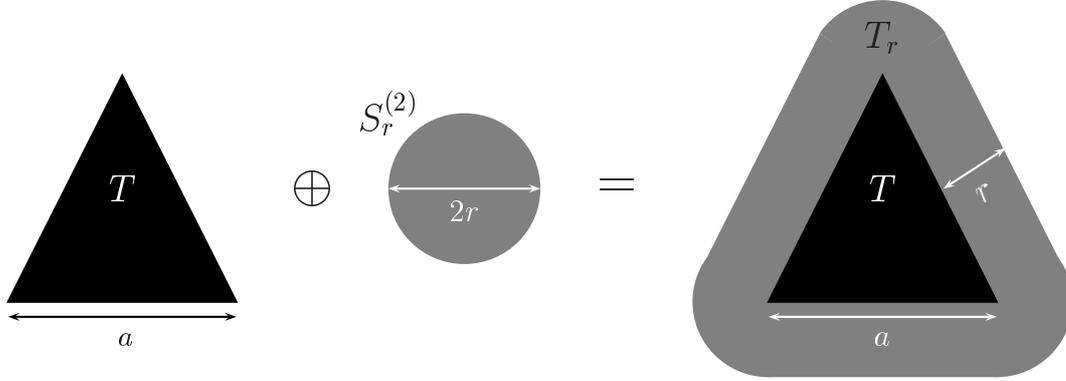


FIG. 1.4 – Ensemble parallèle d'un carré  $Q$  de côté  $a$  à une distance  $r$  en dimension 2

FIG. 1.5 – Ensemble parallèle d'un triangle équilatéral  $T$  de côté  $a$  à une distance  $r$  en dimension 2

### 1.2.3 Les ensembles parallèles en 3D :

Dans un espace 3D, on considère un cube  $C$  de côté  $a$ . Le volume  $V$  de l'ensemble parallèle  $C_r$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$V(C_r) = a^3 + 6a^2r + 12 \left( a \frac{\pi}{4} r^2 \right) + 8 \left( \frac{4}{24} \pi r^3 \right) \quad (1.13)$$

où :

- $a^3$  correspond au volume de l'ensemble original  $C$ .
- $6a^2r$  correspond aux 6 parallélépipèdes rectangulaires situés sur les faces de l'ensemble  $C$  (longueur  $a$ , hauteur  $r$ )
- $12 \left( a \frac{\pi}{4} r^2 \right)$  correspond aux 12 secteurs cylindriques sur les arêtes de l'ensemble  $C$  (longueur  $a$ , rayon  $r$ )
- $8 \left( \frac{4}{24} \pi r^3 \right)$  correspond aux 8 secteurs sphériques sur les sommets de l'ensemble  $C$  (rayon  $r$ )

Après simplification, on obtient :

$$V(C_r) = a^3 + 6a^2r + 3a\pi r^2 + \frac{4\pi}{3} r^3 \quad (1.14)$$

En dimension 3, le volume d'un ensemble parallèle  $K_r$  peut se généraliser en fonction de  $r$  et de l'ensemble original  $K$ .

$$V(K_r) = V(K) + S(K)r + 2\pi B(K)r^2 + \frac{4\pi}{3} r^3 \quad (1.15)$$

où  $V(K)$  représente le volume,  $S(K)$  la surface et  $B(K)$  la largeur moyenne de l'ensemble original  $K$ .

Les formules (1.15), (1.12) montrent que pour des objets géométriques simples en 3D (2D), le changement du volume (respectivement de la surface) peut être calculé à partir du volume, de la surface et de la largeur moyenne (respectivement de la surface et de la largeur moyenne) de l'ensemble original, tant que nous "gonflons" ou nous "dégonflons" l'objet sans changement de sa topologie. Remarquons que le terme du plus grand degré du polynôme  $V(K_r)$  correspond au volume de l'élément structurant (boule). Le volume de la boule  $S_r^{(3)}$

est égale à  $\frac{4\pi}{3}r^3$ .

Cependant, ces relations sont uniquement valables pour des ensembles compacts et convexes. Les ensembles convexes jouent un rôle très important dans la géométrie intégrale. Dans un espace euclidien  $\mathcal{E}$ , ils sont considérés comme une clé pour la caractérisation morphologique des ensembles de points. Dans la nature, les objets ont des formes aléatoires, c'est pourquoi nous souhaitons généraliser le concept ci dessus à des objets de formes arbitraires.

### 1.3 Les fonctionnelles de Minkowski et les ensembles convexes

#### 1.3.1 Définitions

- Un ensemble  $K$  de points de l'espace est dit convexe si il contient entièrement le segment fermé  $[ab]$  pour toute paire  $(a, b)$  de points de  $K$  (Figure 1.6).

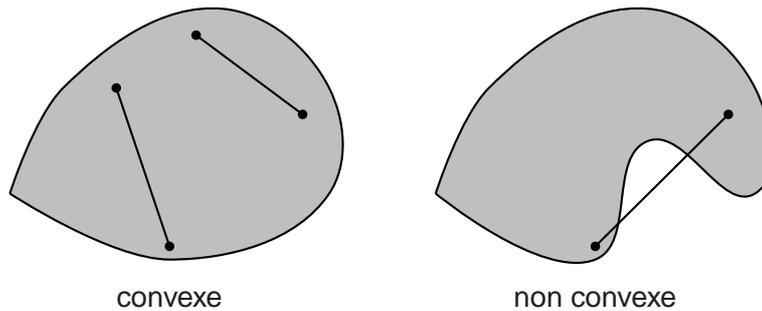


FIG. 1.6 – Schéma d'un ensemble convexe et d'un ensemble non convexe

- Un corps convexe est un ensemble convexe non vide.
- Un point  $x \in \mathbb{R}^d$  est un ensemble convexe et un corps convexe.
- Un ensemble compact est un ensemble limité et fermé.
- La classe de tous les ensembles compacts et convexes est notée  $\mathbb{K}$ .
- L'ensemble parallèle  $K_r = K \oplus S_r^{(d)}$  de l'ensemble compact et convexe  $K \in \mathbb{K}$  à une distance  $r$  est l'union de toutes les boules fermées de rayon  $r$ , dont les centres sont des points appartenant à l'ensemble  $K$ .
- Les opérations qui génèrent les ensembles parallèles préservent les propriétés de convexité et de compacité.

#### 1.3.2 La formule de Steiner

En dimension  $d$  l'expression générale du volume  $v^{(d)}$  du corps parallèle  $K_r$  à une distance  $r$  du corps convexe  $K$ , est donnée par la formule de Steiner :

$$v^d(K_r) = \sum_{\nu=0}^d \binom{d}{\nu} W_\nu^{(d)}(K) r^\nu \quad (1.16)$$

Les  $W_\nu^d(K)$  sont appelées fonctionnelles de Minkowski (ou volumes intrinsèques, quermass integrals).  
Considérons un ensemble convexe  $K$  en dimension 3, en développant la formule de Steiner on obtient le résultat suivant :

$$v^3(K_r) = W_0^3(K) + 3W_1^3(K)r + 3W_2^3(K)r^2 + W_3^3(K)r^3 \quad (1.17)$$

En identifiant (1.15) à (1.17) on déduit la relation entre les fonctionnelles de Minkowski de l'ensemble convexe  $K$  et les quantités géométriques familières. où :

- $W_0^3(K)$  correspond au volume.
- $W_1^3(K)$  correspond à la surface.
- $W_2^3(K)$  correspond à la largeur moyenne.
- $W_3^3(K)$  correspond à la caractéristique d'Euler-Poincaré.

Nous avons représenté dans la Table 1.1 les relations entre les fonctionnelles de Minkowski et les quantités géométriques conventionnelles pour des espaces en dimensions  $d$  ( $d = 1, 2, 3$ )

	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$
$W_0^d(K)$	$l(K)$	$U(K)$	$V(K)$
$W_1^d(K)$	2	$P(K)/2$	$S(K)/3$
$W_2^d(K)$	–	$\pi$	$2\pi B(K)/3$
$W_3^d(K)$	–	–	$4\pi/3$

TAB. 1.1 – Relation entre les fonctionnelles de Minkowski et les mesures géométriques conventionnelles.

### 1.3.3 Les propriétés des fonctionnelles de Minkowski

Les propriétés des fonctionnelles de Minkowski sont :

1. Invariance par déplacement (Figure 1.7) :

$\varphi$  est invariante par déplacement si seulement si :  $\varphi(sK) = \varphi(K)$  pour  $s \in \mathcal{S}$  ( $\mathcal{S}$  est l'ensemble des rotations et translations).

2. C-additivité (convexe-additive) (Figure 1.7) :

Une fonctionnelle  $\varphi$  est C-additive si seulement si :

$$\varphi(K_1 \cup K_2) = \varphi(K_1) + \varphi(K_2) - \varphi(K_1 \cap K_2) \text{ pour } K_1, K_2 \in \mathbb{K} \text{ et } K_1 \cup K_2 \in \mathbb{K}.$$

La fonctionnelle  $\varphi$  de l'union  $K_1 \cup K_2$  de deux ensembles convexes  $K_1$  et  $K_2$  est la somme des fonctionnelles des ensembles convexes moins la fonctionnelle de leurs intersection. La notion de C-additivité (additive dans l'ensemble  $\mathbb{K}$ ) doit être vérifiée car l'union de deux ensembles convexes n'est pas forcément un ensemble convexe.

3. Continuité (Figure 1.7) :

$\varphi$  est continue si :

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \varphi(K_l) = \varphi(K)$$

Chaque fois que  $\{K_l\}$  est une séquence d'ensembles compacts tel que :

$$\lim_{l \rightarrow \infty} K_l = K$$

La propriété de continuité de  $\varphi$  implique que chaque fois que les ensembles compacts et convexes  $K_l$  approchent l'ensemble compact et convexe  $K$ , alors  $\varphi(K_l)$  approche  $\varphi(K)$ .

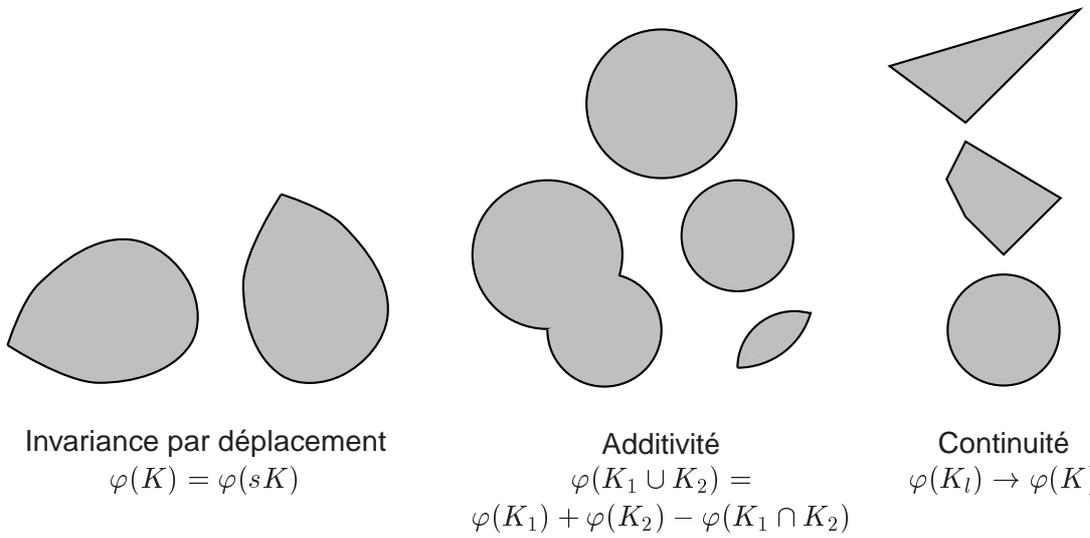


FIG. 1.7 – Les propriétés des fonctionnelles de Minkowski

4. Monotonie (croissante) :  $\varphi$  est une fonctionnelle croissante :

$$\varphi(A) \leq \varphi(B) \text{ si } A \subset B.$$

La valeur de la fonctionnelle de Minkowski de l'ensemble  $A$  ne va pas décroître si l'ensemble  $A$  devient plus grand.

5. Homogénéité :

$\varphi$  est une fonctionnelle homogène si :

$$\varphi(kA) = k^p \varphi(A) \quad k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq p \leq d.$$

Dans un espace à trois dimensions, considérant un cube  $A_1$  de côté  $a$ , et un cube  $A_2$  de côté  $2a$ .

Notons par  $V(A_1)$  (respectivement  $V(A_2)$ ) le volume du cube  $A_1$  (respectivement du cube  $A_2$ ).

$$V(A_1) = a^3, V(A_2) = (2a)^3 = 2^3 a^3 = 2^3 V(A_1), (p = d). \tag{1.18}$$

Notons par  $S(A_1)$  (respectivement  $S(A_2)$ ) la surface du cube  $A_1$  (respectivement du cube  $A_2$ ).

$$S(A_1) = 6a^2, S(A_2) = 24a^2 = 2^2 (6a^2) = 2^2 S(A_1), (p = d - 1). \tag{1.19}$$

Notons par  $B(A_1)$  (respectivement  $B(A_2)$ ) La largeur moyenne du cube  $A_1$  (respectivement du cube  $A_2$ ).

$$B(A_1) = a, B(A_2) = 2a = 2B(A_1), (p = d - 2). \quad (1.20)$$

Notons par  $\chi(A_1)$  (respectivement  $\chi(A_2)$ ) la caractéristique d'Euler du cube  $A_1$  (respectivement du cube  $A_2$ ).

$$\chi(A_1) = 1, \chi(A_2) = 1 = 2^0 \chi(A_1), (p = d - 3). \quad (1.21)$$

### 1.3.4 Théorème de Hadwiger

Soit  $\varphi$  une fonctionnelle définie sur l'ensemble  $K$ . Si  $\varphi$  vérifie les cinq propriétés (continuité, invariance par déplacement, C-additivité, monotonie, homogénéité) alors  $\varphi$  peut être écrite sous la forme suivante :

$$\varphi(K) = \sum_{\nu=0}^d a_\nu W_\nu^{(d)}(K) \quad (1.22)$$

avec  $a_\nu \in \mathbb{R}$ .

- les  $d + 1$  fonctionnelles de Minkowski forment un système complet des mesures morphologiques sur l'ensemble des corps convexes.
- Chaque mesure sur un ensemble fini de convexes compacts peut être écrite comme une combinaison linéaire des  $d + 1$  fonctionnelles de Minkowski.

### 1.3.5 L'anneau convexe

Les résultats des paragraphes précédents peuvent être généralisés à des classes d'objets beaucoup plus générales en considérant l'anneau convexe  $\mathcal{R}$  qui représente la classe de tous les sous-ensembles  $A$  de  $\mathbb{R}^d$  qui peuvent être exprimés sous la forme d'unions finies d'ensembles convexes et compacts  $\{K_i\}$ .

$$A = \bigcup_{i=1}^l K_i, \quad K_i \in \mathbb{K}. \quad (1.23)$$

Si  $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$  alors  $A_1 \cup A_2$  et  $A_1 \cap A_2$  appartiennent à  $\mathcal{R}$ . Une fonctionnelle additive  $\varphi$  a les propriétés suivantes :

- $\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2) - \varphi(A_1 \cap A_2)$
- L'invariance par déplacement de  $\varphi$  en  $\mathcal{R}$  est définie comme  $\varphi$  en  $\mathbb{K}$ .

La base de l'extension de  $\mathbb{K}$  à  $\mathcal{R}$  est la caractéristique d'Euler (ou nombre de connexité)  $\chi$  qui est défini comme suit :

$$\chi(K) = \begin{cases} 1 & \text{si } K \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } K = \emptyset \end{cases} \quad (1.24)$$

pour tout  $K \in \mathbb{K}$ .

La caractéristique d'Euler est une fonctionnelle additive et invariante par déplacement dans  $\mathbb{R}^d$ , elle est égale à 1 pour un ensemble compact. L'utilisation de la propriété d'additivité de la caractéristique d'Euler sur l'élément  $A$  de l'anneau convexe  $\mathcal{R}$  donne le résultat suivant :

$$\chi(A) = \chi\left(\bigcup_{i=1}^l K_i\right) = \sum_i \chi(K_i) - \sum_{i < j} \chi(K_i \cap K_j) + \dots + (-1)^{l+1} \chi(K_1 \cap \dots \cap K_l) \quad (1.25)$$

La valeur de  $\chi(A)$  est indépendante de la représentation de  $A$  sous forme d'unions finies d'ensembles convexes et compacts. Tous les ensembles qui apparaissent à droite de l'équation sont convexes, donc on peut utiliser (1.24) pour calculer la valeur numérique de  $\chi(A)$ . La caractéristique d'Euler peut être utilisée pour définir les fonctionnelles de Minkowski pour tous les éléments de l'anneau convexe  $A \in \mathcal{R}$ .

## Chapitre 2

# Aspect Calculatoire

### 2.1 Les fonctionnelles de Minkowski et les corps ouverts

Notons par  $\partial A$  le bord (les frontières) du corps  $A$  et par  $\overset{\circ}{A}$  le corps ouvert  $A \setminus \partial A$ , de dimension  $n$  appartenant à l'anneau convexe  $\mathcal{R}$  dans un espace  $\mathbb{R}^d$  ( $0 \leq n \leq d$ ). Les valeurs des fonctionnelles de Minkowski d'un corps ouvert  $\overset{\circ}{A}$  sont données par la formule suivante :

$$W_\nu^{(d)}(\overset{\circ}{A}) = (-1)^{d+n+\nu} W_\nu^{(d)}(A) , \quad \nu = 0 \dots d \quad (2.1)$$

#### 2.1.1 Calcul des fonctionnelles de Minkowski pour un pixel (2D) :

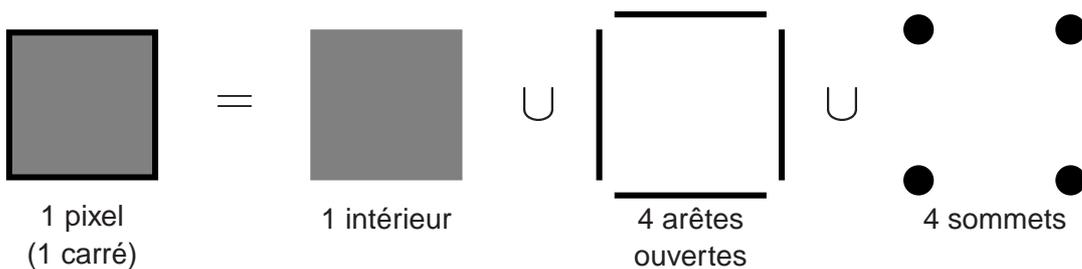


FIG. 2.1 – Décomposition d'un pixel en dimension 2

Considérons que chaque pixel est un carré composé d'un intérieur ouvert  $\overset{\circ}{Q}$ , de 4 arêtes ouvertes  $\overset{\circ}{L}$  et de 4 sommets  $\overset{\circ}{P}$ . Ces éléments de base sont obtenus par décomposition d'un pixel (carré de côté  $a$ ) dans un espace euclidien à deux dimensions (Figure 2.1).

En développant l'équation 2.1 pour  $d = 2$ , on obtient :

$$W_\nu^{(2)}(\check{A}) = (-1)^{2+n+\nu} W_\nu^{(2)}(A) , \quad \nu = 0 \dots 2 \quad (2.2)$$

Calculons la troisième fonctionnelle de Minkowski ( $\nu = 2$ ), pour une face ouverte  $\check{Q}$  ( $n = 2$ ).

$$W_2^{(2)}(\check{Q}) = (-1)^{2+2+2} W_2^{(2)}(Q). \quad (2.3)$$

En utilisant les valeurs de la Table 1.1, on trouve que  $W_2^{(2)}(Q) = \pi$ . Donc :

$$W_2^{(2)}(\check{Q}) = \pi. \quad (2.4)$$

Calculons la deuxième fonctionnelle de Minkowski ( $\nu = 1$ ), pour une face ouverte  $\check{Q}$  ( $n = 2$ ).

$$W_1^{(2)}(\check{Q}) = (-1)^{2+2+1} W_1^{(2)}(Q). \quad (2.5)$$

En utilisant les valeurs de la Table 1.1, on trouve que  $W_1^{(2)}(Q) = P(K)/2 = 4a/2 = 2a$ . Donc :

$$W_1^{(2)}(\check{Q}) = -2a. \quad (2.6)$$

La Table 2.1 représente les valeurs des fonctionnelles de Minkowski  $W_\nu^{(2)}$  ( $\nu = 0 \dots 2$ ) pour les ensembles ouverts  $\check{N}_m$ , où  $\check{N}_0$  représente un sommet  $\check{P}$ ,  $\check{N}_1$  représente un segment ouvert  $\check{L}$  et  $\check{N}_2$  représente un intérieur ouvert  $\check{Q}$ .

$m$	$\check{N}_m$	$W_0^2$	$W_1^2$	$W_2^2$
0	$\check{P}$	0	0	$\pi$
1	$\check{L}$	0	$a$	$-\pi$
2	$\check{Q}$	$a^2$	$-2a$	$\pi$

TAB. 2.1 – Les valeurs des fonctionnelles de Minkowski  $W_\nu^{(2)}$  ( $\nu = 0 \dots 2$ ) pour les ensembles ouverts  $\check{N}_m$ .

### 2.1.2 Calcul des fonctionnelles de Minkowski pour un voxel (3D) :

Considérons que chaque voxel est un cube composé de son intérieur ouvert ( $\check{C}$ ), de 6 faces ouvertes ( $\check{Q}$ ), de 12 arêtes ouvertes ( $\check{L}$ ) et de 8 sommets ( $\check{P}$ ) (Figure 2.2). Ces éléments de base sont obtenus par une décomposition d'un cube de côté  $a$  (voxel) dans un espace euclidien à trois dimensions.

En développant l'équation 2.1 pour  $d = 3$ , on obtient :

$$W_\nu^{(3)}(\check{A}) = (-1)^{3+n+\nu} W_\nu^{(3)}(A) , \quad \nu = 0 \dots 3 \quad (2.7)$$

Calculons la quatrième fonctionnelle de Minkowski ( $\nu = 3$ ), pour un cube ouvert  $\check{C}$  ( $n = 3$ ).

$$W_3^{(3)}(\check{C}) = (-1)^{3+3+3} W_3^{(3)}(Q). \quad (2.8)$$

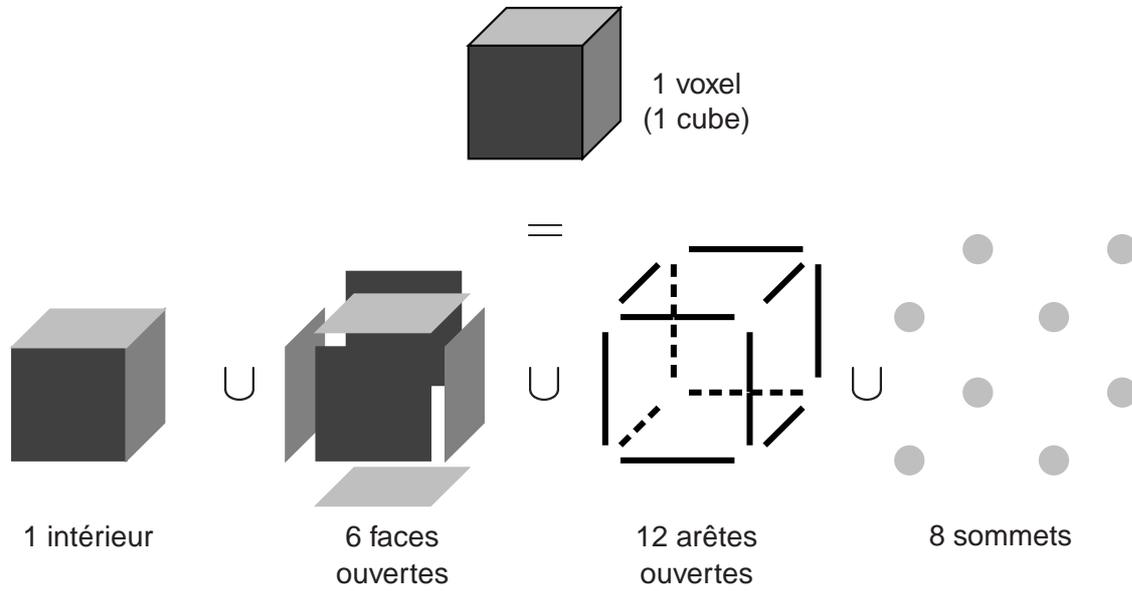


FIG. 2.2 – Décomposition d'un voxel en dimension 3

En utilisant les valeurs de la Table 1.1, on trouve que  $W_3^{(3)}(C) = 4\pi/3$ . Donc :

$$W_3^{(3)}(\check{C}) = -4\pi/3 \quad (2.9)$$

Calculons la troisième fonctionnelle de Minkowski ( $\nu = 2$ ), pour une face ouverte  $\check{Q}$  ( $n = 2$ ).

$$W_2^{(3)}(\check{C}) = (-1)^{3+2+2}W_2^{(3)}(Q). \quad (2.10)$$

En utilisant les valeurs de la Table 1.1, on trouve que  $W_2^{(3)}(C) = 2\pi B(K)/3 = 2\pi a/3$ . Donc :

$$W_2^{(3)}(\check{C}) = -2\pi a/3 \quad (2.11)$$

La Table 2.2 représente les valeurs des fonctionnelles de Minkowski  $W_\nu^{(3)}(\nu = 0 \dots 3)$  pour les ensembles ouverts  $\check{N}_m$ , où  $\check{N}_0$  représente un sommet  $\check{P}$ ,  $\check{N}_1$  représente un segment ouvert  $\check{L}$ ,  $\check{N}_2$  représente une face ouverte  $\check{Q}$  et  $\check{N}_3$  représente cube ouvert  $\check{C}$ .

$m$	$\check{N}_m$	$W_0^3$	$W_1^3$	$W_2^3$	$W_3^3$
0	$\check{P}$	0	0	0	$4\pi/3$
1	$\check{L}$	0	0	$\pi a/3$	$-4\pi/3$
2	$\check{Q}$	0	$2a^2/3$	$-2\pi a/3$	$4\pi/3$
3	$\check{C}$	$a^3$	$-2a^2$	$\pi a$	$-4\pi/3$

TAB. 2.2 – Les valeurs des fonctionnelles de Minkowski  $W_\nu^3$  ( $\nu = 0 \dots 3$ ) pour les ensembles ouverts  $\check{N}_m$ .

## 2.2 Application à des images binaires :

Une image binaire 2D (3D) est une grille de  $\mathbb{Z}^2$  ( $\mathbb{Z}^3$ ) représentée par une matrice de pixels (voxels) où chaque pixel (voxel) est affecté d'une valeur binaire. L'objet est l'ensemble des pixels (voxels) qui ont pour valeur 1 (appelés aussi pixels (voxels) noirs, pleins ou actifs). Le fond est l'ensemble des pixels (voxels) qui ont pour valeur 0 (appelés aussi pixels (voxels) blancs, vides ou inactifs). L'objet n'est pas forcément un ensemble convexe mais chaque pixel (voxel) contenu dans une image binaire en 2D (3D) est un ensemble convexe. C'est pourquoi de telles images peuvent être considérées comme des éléments de l'anneau convexe  $\mathcal{R}$ . Ainsi on peut faire appel à la géométrie intégrale pour construire des fonctionnelles d'image pour effectuer des mesures de formes dans l'image. On peut décomposer une image comme l'union de voxels noirs pour pouvoir calculer les fonctionnelles de Minkowski de cette image. Dans un espace de dimension  $d$ , les valeurs des fonctionnelles de Minkowski pour la forme  $\mathcal{P}$  sont données par l'équation suivante :

$$W_\nu^{(d)}(\mathcal{P}) = \sum_{m=0}^d W_\nu^{(d)}(\check{N}_m) n_m(\mathcal{P}) ; \nu = 0 \dots d. \quad (2.12)$$

où :  $n_m(\mathcal{P})$  est le nombre d'ensembles ouverts et convexes  $\check{N}_m$  de type  $m$ .

La complexité des structures mathématiques de la géométrie intégrale est nullement comparable à la simplicité de ses applications pratiques. D'après le théorème de Hadwiger, en dimension  $d$ , il existe  $d + 1$  fonctionnelles de Minkowski, ces fonctionnelles forment un système complet des mesures morphologiques sur l'ensemble des corps convexes. Cela implique que si nous n'utilisons que des fonctionnelles additives d'image nous devons seulement calculer les  $d+1$  fonctionnelles de Minkowski dans le but de caractériser la morphologie des formes puisque toute autre mesure est une combinaison linéaire de ces fonctionnelles.

### 2.2.1 Cas d'une image binaire 2D :

Chaque pixel est considéré comme un carré dont la taille linéaire est normalisée à 1 ( $a = 1$ ). Notre but est de caractériser la géométrie et la topologie des ensembles formés par les pixels noirs. D'après le théorème de Hadwiger, il existe trois fonctionnelles de Minkowski (la surface  $U$ , le périmètre  $P$  et la caractéristique d'Euler  $\chi$ ) qui décrivent le contenu morphologique de cet ensemble. La caractéristique d'Euler  $\chi$  décrit la connectivité (la topologie) des formes, dans un espace à deux dimensions,  $\chi$  est égale au nombre des régions des pixels noirs

connectés moins le nombre des régions fermées composées de pixels blancs. Deux pixels noirs sont connectés si seulement si ils sont les plus proches voisins d'un autre pixel ou bien si ces deux pixels sont connectés par une chaîne de pixels noirs qui sont des plus proches voisins entre eux. Conceptuellement, la procédure qui permet de calculer ces trois valeurs (la surface, le périmètre et la caractéristique d'Euler-Poincaré) consiste en deux étapes. Premièrement, on décompose chaque pixel noir en 4 sommets, en 4 arêtes ouvertes et en 1 face ouverte. Deuxièmement, on calcule le nombre total des faces ouvertes  $n_2$ , des arêtes ouvertes  $n_1$  et des sommets  $n_0$  [4]. En utilisant l'équation (2.12) (additivité des fonctionnelles), la Table 1.1 et la Table 2.1, il est possible de déterminer les trois fonctionnelles de Minkowski pour un objet 2D discrétisé.

En développant l'équation (2.12) pour  $d = 2$  on obtient :

$$W_\nu^{(2)}(\mathcal{P}) = \sum_{m=0}^2 W_\nu^{(2)}(\check{N}_m)n_m(\mathcal{P}) ; \nu = 0 \dots 2 \quad (2.13)$$

$$W_\nu^{(2)}(\mathcal{P}) = W_\nu^{(2)}(\check{N}_0)n_0(\mathcal{P}) + W_\nu^{(2)}(\check{N}_1)n_1(\mathcal{P}) + W_\nu^{(2)}(\check{N}_2)n_2(\mathcal{P}) \quad (2.14)$$

L'affectation des valeurs de  $\nu$  ( $\nu$  varie entre 0 et 2) à l'équation 2.14 génère trois nouvelles équations :

- pour  $\nu = 0$  :

$$W_0^{(2)}(\mathcal{P}) = W_0^{(2)}(\check{N}_0)n_0(\mathcal{P}) + W_0^{(2)}(\check{N}_1)n_1(\mathcal{P}) + W_0^{(2)}(\check{N}_2)n_2(\mathcal{P}) \quad (2.15)$$

- pour  $\nu = 1$  :

$$W_1^{(2)}(\mathcal{P}) = W_1^{(2)}(\check{N}_0)n_0(\mathcal{P}) + W_1^{(2)}(\check{N}_1)n_1(\mathcal{P}) + W_1^{(2)}(\check{N}_2)n_2(\mathcal{P}) \quad (2.16)$$

- pour  $\nu = 2$  :

$$W_2^{(2)}(\mathcal{P}) = W_2^{(2)}(\check{N}_0)n_0(\mathcal{P}) + W_2^{(2)}(\check{N}_1)n_1(\mathcal{P}) + W_2^{(2)}(\check{N}_2)n_2(\mathcal{P}) \quad (2.17)$$

En utilisant les valeurs de la Table 1.1 on trouve que  $W_0^{(2)}(\mathcal{P}) = U(\mathcal{P})$ .

D'après la Table 2.1, on trouve que  $W_2^{(2)}(\check{N}_0) = 0$ ,  $W_2^{(2)}(\check{N}_1) = 0$ ,  $W_2^{(2)}(\check{N}_2) = a^2$ .

En remplaçant par ces valeurs dans l'équation 2.15 on obtient :

-  $W_0^{(2)}(\mathcal{P}) = a^2 n_2(\mathcal{P}) = n_2(\mathcal{P}) = U(\mathcal{P})$

$$U(\mathcal{P}) = n_2(\mathcal{P}) \quad (2.18)$$

- On procède de la même manière pour les équations 2.16 et 2.17.

-  $W_1^{(2)}(\mathcal{P}) = n_1(\mathcal{P}) - 2 \times n_2(\mathcal{P}) = P(\mathcal{P})/2$

$$P(\mathcal{P}) = 2n_1(\mathcal{P}) - 4n_2(\mathcal{P}) \quad (2.19)$$

-  $W_2^{(2)}(\mathcal{P}) = \pi n_0(\mathcal{P}) - \pi n_1(\mathcal{P}) + \pi n_2(\mathcal{P}) = \chi(\mathcal{P})\pi$

$$\chi(\mathcal{P}) = n_0(\mathcal{P}) - n_1(\mathcal{P}) + n_2(\mathcal{P}) \quad (2.20)$$

### 2.2.2 Cas d'une image binaire 3D :

Dans un espace à trois dimensions, les quatre fonctionnelles de Minkowski d'un cube  $C$  correspondent au volume  $V$ , à la surface  $S$ , à la largeur moyenne  $B$  et à la caractéristique d'Euler  $\chi$ . En 3D,  $\chi$  est égale au nombre de régions des voxels noirs connectés plus le nombre des régions des voxels blancs fermées moins le nombre des tunnels. Un tunnel est une région formée de voxels blancs qui perce une région de voxels noirs connectés. Comme dans le cas de 2D, la première étape de calcul de ces quatre fonctionnelles consiste à considérer chaque voxel noir comme l'union de 8 sommets, 12 arêtes ouvertes, 6 faces ouvertes et un cube ouvert. La deuxième étape est le calcul du nombre total des cubes ouverts  $n_3$ , des faces ouvertes  $n_2$ , des arêtes ouvertes  $n_1$  et des sommets  $n_0$ .

En utilisant l'équation (2.12) (additivité des fonctionnelles), la Table 1.1, et la Table 2.2, il est possible de déterminer les quatre fonctionnelles de Minkowski pour un objet 3D discrétisé.

En développant l'équation (2.12) pour  $d = 3$  on obtient :

$$W_\nu^{(3)}(\mathcal{P}) = \sum_{m=0}^3 W_\nu^{(3)}(\check{N}_m)n_m(\mathcal{P}) ; \nu = 0 \dots 3 \quad (2.21)$$

$$W_\nu^{(3)}(\mathcal{P}) = W_\nu^{(3)}(\check{N}_0)n_0(\mathcal{P}) + W_\nu^{(3)}(\check{N}_1)n_1(\mathcal{P}) + W_\nu^{(3)}(\check{N}_2)n_2(\mathcal{P}) + W_\nu^{(3)}(\check{N}_3)n_3(\mathcal{P}) \quad (2.22)$$

L'affectation des valeurs de  $\nu$  ( $\nu$  varie entre 0 et 3) à l'équation 2.22 génère quatre nouvelles équations :

- pour  $\nu = 0$  :

$$W_0^{(3)}(\mathcal{P}) = W_0^{(3)}(\check{N}_0)n_0(\mathcal{P}) + W_0^{(3)}(\check{N}_1)n_1(\mathcal{P}) + W_0^{(3)}(\check{N}_2)n_2(\mathcal{P}) + W_0^{(3)}(\check{N}_3)n_3(\mathcal{P}) \quad (2.23)$$

- pour  $\nu = 1$  :

$$W_1^{(3)}(\mathcal{P}) = W_1^{(3)}(\check{N}_0)n_0(\mathcal{P}) + W_1^{(3)}(\check{N}_1)n_1(\mathcal{P}) + W_1^{(3)}(\check{N}_2)n_2(\mathcal{P}) + W_1^{(3)}(\check{N}_3)n_3(\mathcal{P}) \quad (2.24)$$

- pour  $\nu = 2$  :

$$W_2^{(3)}(\mathcal{P}) = W_2^{(3)}(\check{N}_0)n_0(\mathcal{P}) + W_2^{(3)}(\check{N}_1)n_1(\mathcal{P}) + W_2^{(3)}(\check{N}_2)n_2(\mathcal{P}) + W_2^{(3)}(\check{N}_3)n_3(\mathcal{P}) \quad (2.25)$$

- pour  $\nu = 3$  :

$$W_3^{(3)}(\mathcal{P}) = W_3^{(3)}(\check{N}_0)n_0(\mathcal{P}) + W_3^{(3)}(\check{N}_1)n_1(\mathcal{P}) + W_3^{(3)}(\check{N}_2)n_2(\mathcal{P}) + W_3^{(3)}(\check{N}_3)n_3(\mathcal{P}) \quad (2.26)$$

En utilisant les valeurs de la Table 1.1 on trouve que  $W_0^{(3)}(\mathcal{P}) = V(\mathcal{P})$ .

D'après la Table 2.2 on trouve que  $W_3^{(3)}(\check{N}_0) = 0$ ,  $W_3^{(3)}(\check{N}_1) = 0$ ,  $W_3^{(3)}(\check{N}_2) = 0$ ,  $W_3^{(3)}(\check{N}_3) = 1$ .

En remplaçant par ces valeur dans l'équation 2.23 on obtient :

$$\begin{aligned} - W_0^{(3)}(\mathcal{P}) &= n_3(\mathcal{P}) = V(\mathcal{P}) \\ V(\mathcal{P}) &= n_3(\mathcal{P}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

- On procède de la même manière pour les équations 2.24 , 2.25 et 2.26.
- $W_1^{(3)}(\mathcal{P}) = (2/3)n_2(\mathcal{P}) - 2n_3(\mathcal{P}) = S(\mathcal{P})/3$

$$S(\mathcal{P}) = 2n_2(\mathcal{P}) - 6n_3(\mathcal{P}) \quad (2.28)$$

- $W_2^{(3)}(\mathcal{P}) = (\pi/3)n_1(\mathcal{P}) - (2\pi/3)n_2(\mathcal{P}) + \pi n_3(\mathcal{P})2\pi B(\mathcal{P})/3$

$$2B(\mathcal{P}) = n_1(\mathcal{P}) - 2n_2(\mathcal{P}) + 3n_3(\mathcal{P}) \quad (2.29)$$

- $W_3^{(3)}(\mathcal{P}) = (4\pi/3)n_0(\mathcal{P}) - (4\pi/3)n_1(\mathcal{P}) + (4\pi/3)n_2(\mathcal{P}) - (4\pi/3)n_3(\mathcal{P})4\pi\chi(\mathcal{P})/3$

$$\chi(\mathcal{P}) = n_0(\mathcal{P}) - n_1(\mathcal{P}) + n_2(\mathcal{P}) - n_3(\mathcal{P}) \quad (2.30)$$

La caractérisation morphologique d'une forme 3D se réduit donc au dénombrement des objets géométriques élémentaires (cubes ouverts, faces ouvertes, arêtes ouvertes et sommets) qui constituent cette forme.

## 2.3 Énumération des éléments géométriques de base

### 2.3.1 Algorithme de base proposé par Michielsen et De Raedt

Le problème rencontré pour la résolution des équations précédentes (2.18, 2.19, 2.20, pour le 2D et 2.27, 2.28, 2.29, 2.30 pour le 3D) est de dénombrer les cubes ouverts, les faces ouvertes, les arêtes ouvertes et les sommets, en évitant de compter un cube, une face, une arête et un sommet plus d'une fois. Par exemple la Figure 2.3 montre l'évolution des éléments géométriques de base lorsqu'on rajoute un voxel noir à un ensemble de trois voxels.

Dans [5], Michielsen et De Raedt ont été les premiers à proposer un algorithme pour dénombrer ces éléments géométriques de base. Cet algorithme permet de calculer facilement les fonctionnelles de Minkowski pour une forme donnée, en ajoutant les pixels (voxels) noirs un par un à un fond initialement blanc. Dans cet article, ils donnent des équations qui montrent comment  $n_3(\mathcal{P})$ ,  $n_2(\mathcal{P})$ ,  $n_1(\mathcal{P})$ ,  $n_0(\mathcal{P})$  évoluent lorsqu'un pixel (voxel) noir est ajouté à une forme 2D (3D). Dans les deux paragraphes suivants, nous allons détailler précisément ces équations.

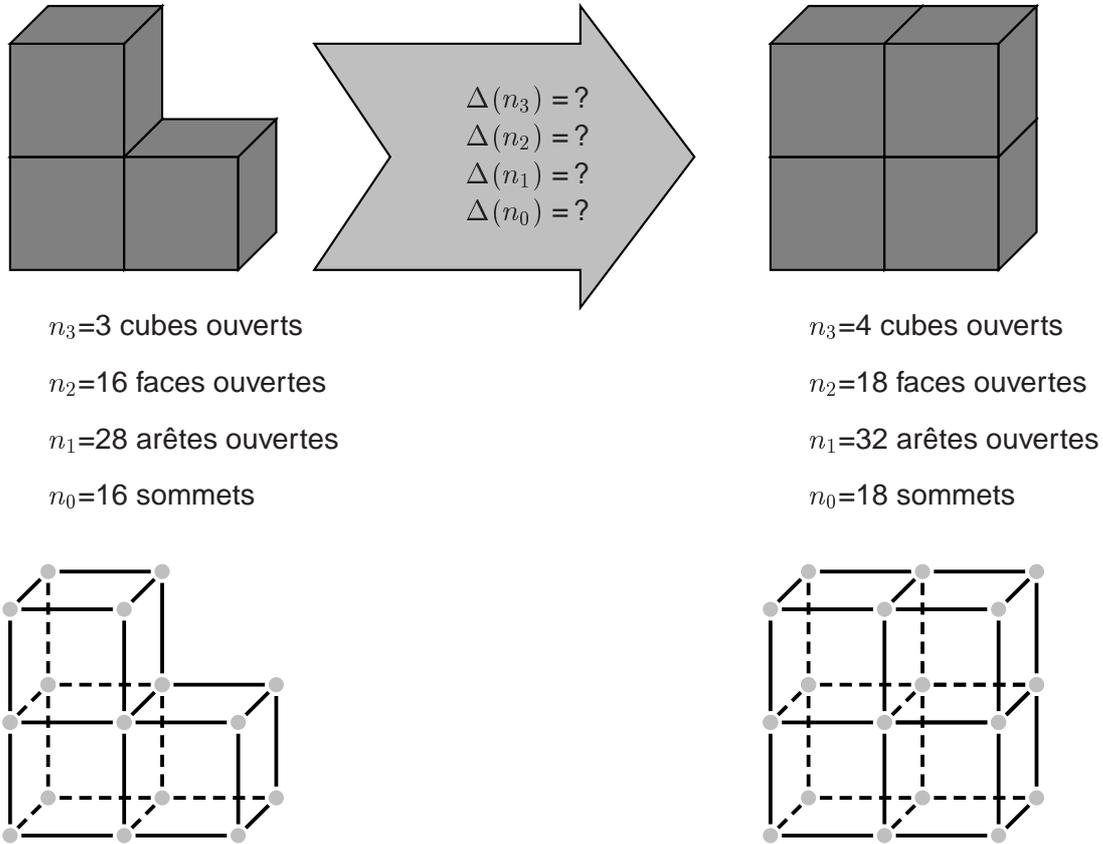


FIG. 2.3 – Dénombrement des primitives de base suite a l'ajout d'un voxel plein

### 2.3.2 Algorithme de calcul des $n_m(\mathcal{P})$ en 2D

En 2D, considérons une image  $\mathcal{P}$  de taille  $L_x \times L_y$ . Notons par  $\mathcal{P}(p)$  un pixel à la position  $p \in \mathbb{Z}^2$  de l'image, où  $p = (i, j)$  avec  $i = 1 \dots L_x$  et  $j = 1 \dots L_y$ .

Par définition :

$$\mathcal{P}(p) = \begin{cases} 1 & \text{si le pixel est noir (objet)} \\ 0 & \text{si le pixel est blanc (fond)} \end{cases} \quad (2.31)$$

Nous définissons deux relations d'adjacence (voir figure 2.4) :

- deux pixels sont dits 4-adjacents s'ils sont voisins suivant 1 arête.
- deux pixels sont dits 8-adjacents s'ils sont voisins suivant 1 arête ou 1 sommet.

Les nombres 4 et 8 correspondent au nombre de pixels adjacents à un pixel donné pour le type d'adjacence choisi. Tout pixel a donc 2 types de voisins.

Etant donné le pixel courant  $\mathcal{P}(p)$  à la position  $p = (i, j)$ , les pixels voisins adjacents à  $\mathcal{P}(p)$  sont :

- pour la 4-adjacence (voisinage par une arête), aux positions suivantes :

$$(i + 1, j), (i - 1, j), (i, j + 1), (i, j - 1) \quad (2.32)$$

- pour la 8-adjacence (voisinage par un sommet), aux positions suivantes :

positions précédentes (éq. 2.32) et  $(i + 1, j + 1), (i + 1, j - 1), (i - 1, j + 1), (i - 1, j - 1)$  (2.33)

On vérifie les relations suivantes :

- $(i, j)$  est 4-adjacent à  $(i', j')$  si et seulement si  $|i - i'| + |j - j'| = 1$ .
- $(i, j)$  est 8-adjacent à  $(i', j')$  si et seulement si  $\max(|i - i'|, |j - j'|) = 1$ .

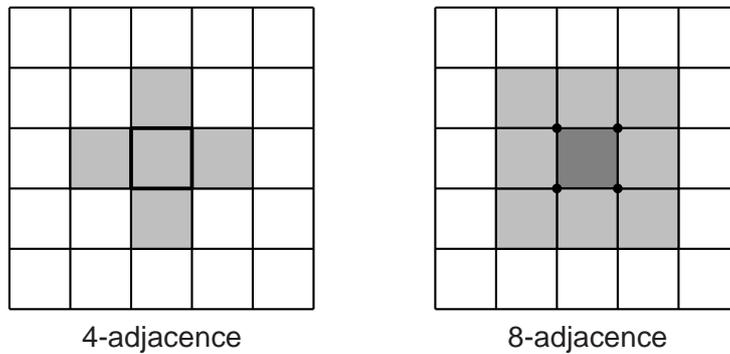


FIG. 2.4 – Relation d'adjacence en 2D

L'incrémentation du nombre de faces ouvertes ( $\Delta n_2(\mathcal{P}(p))$ ) contenues dans une image  $\mathcal{P}$  lors de l'ajout d'un pixel noir  $\mathcal{P}(p)$  est donnée par l'équation suivante :

$$\Delta n_2(\mathcal{P}(p)) = 1 \quad (2.34)$$

$\Delta$  indique la différence entre le nombre des primitives de base (ici faces ouvertes) avant et après l'insertion d'un nouveau pixel noir .

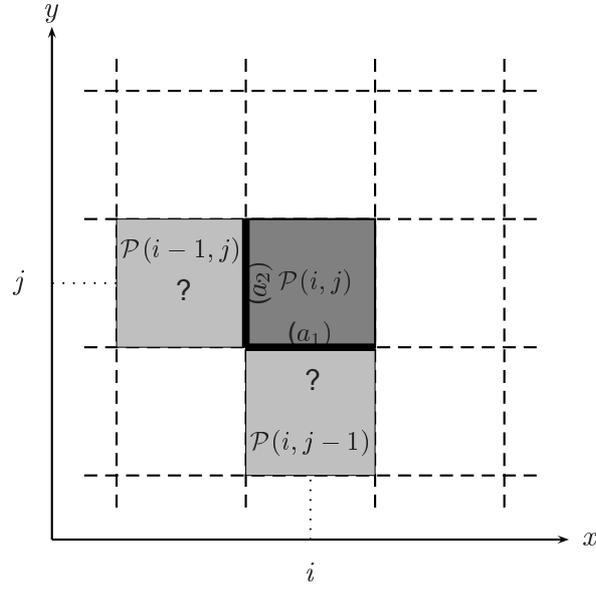
Cette équation est composé d'un seul terme (car 1 face ouverte par pixel). Cette équation est égale à 1 puisque dès qu'on ajoute un nouveau pixel noir, une nouvelle face ouverte doit être automatiquement comptée.

L'incrémentation du nombre d'arêtes ouvertes ( $\Delta n_1(\mathcal{P}(p))$ ) est donnée par l'équation suivante :

$$\Delta n_1(\mathcal{P}(p)) = \sum_{\alpha=\pm 1} [\mathcal{Q}(i + \alpha, j) + \mathcal{Q}(i, j + \alpha)] \quad , \quad (2.35)$$

avec

$$\mathcal{Q}(p) = \begin{cases} 1 - \mathcal{P}(p) = 0 & \text{si } \mathcal{P}(p) \text{ est un pixel noir.} \\ 1 - \mathcal{P}(p) = 1 & \text{si } \mathcal{P}(p) \text{ est un pixel blanc.} \end{cases} \quad (2.36)$$



$$\alpha = -1 : \quad \begin{array}{cc} \mathcal{Q}(i-1, j) & + \quad \mathcal{Q}(i, j-1) \\ (a_1?) & \quad (a_2?) \end{array}$$

FIG. 2.5 – Dénombrement des arêtes ouvertes introduites par l'ajout d'un nouveau pixel à la position  $(i, j)$ . Illustration de la formule :  $\Delta n_1(\mathcal{P}) = \sum_{\alpha=\pm 1} [\mathcal{Q}(i+\alpha, j) + \mathcal{Q}(i, j+\alpha)]$ .

Cette équation peut être décomposée en 4 termes (car 4 arêtes ouvertes par pixel) :

$$\Delta n_1(\mathcal{P}(p)) = \mathcal{Q}(i-1, j) + \mathcal{Q}(i, j-1) + \mathcal{Q}(i+1, j) + \mathcal{Q}(i, j+1) \quad (2.37)$$

Chaque terme teste la présence éventuelle d'une arête en s'intéressant à la valeur d'un seul pixel. En effet, dans une image 2D, une arête est un élément géométrique commun à deux pixels (le pixel courant et un de ses pixels 4-adjacents (équation 2.32))

Si on développe le premier terme de l'équation 2.35 pour  $\alpha = -1$  on obtient :

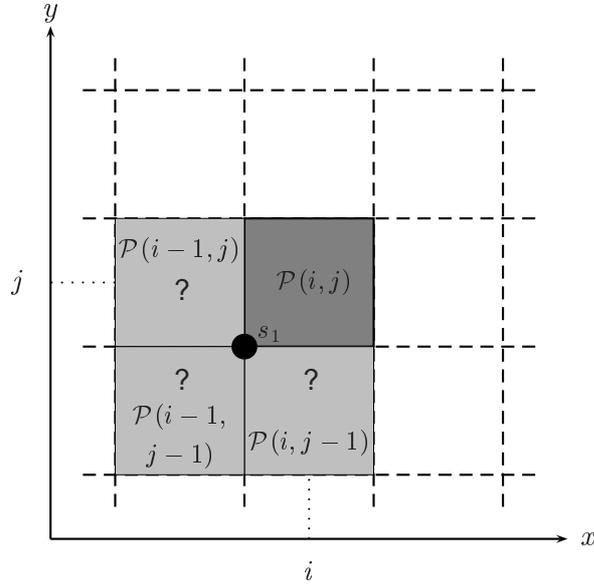
$$\mathcal{Q}(i-1, j) + \mathcal{Q}(i, j-1) \quad , \quad (2.38)$$

Ce premier terme revient à tester la présence de deux arêtes  $a_1$  et  $a_2$  (d'après les notations de la figure 2.5, représentant le pixel courant  $\mathcal{P}(i, j)$  et deux de ses pixels 4-adjacents) :

- Pour l'arête  $a_1$ ,  $\Delta n_1(\mathcal{P}(p))$  sera incrémentée de 1 si le pixel 4-adjacent  $\mathcal{P}(i, j-1)$  est vide. Si ce pixel est plein  $\Delta n_1(\mathcal{P}(p))$  reste inchangé.
- Pour l'arête  $a_2$ , le pixel voisin à tester est  $\mathcal{P}(i-1, j)$ .

En résumé, dès qu'un pixel 4-adjacent est plein,  $\Delta n_1(\mathcal{P}(p))$  reste inchangé.

$\Delta n_1(\mathcal{P}(p))$  pourra être incrémenté au plus de 4 si tous les pixels 4-adjacents sont vides.



$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -1 \end{cases} \quad s_1 = \mathcal{Q}(i-1, j) \times \mathcal{Q}(i, j-1) \times \mathcal{Q}(i-1, j-1)$$

FIG. 2.6 – Dénombrement des sommets introduits par l'ajout d'un nouveau pixel à la position  $(i, j)$ . Illustration du premier terme de la formule :  $\Delta n_0(\mathcal{P}) = \sum_{\alpha, \beta = \pm 1} [\mathcal{Q}(i + \alpha, j) \mathcal{Q}(i + \alpha, j + \beta) \mathcal{Q}(i, j + \beta)]$  pour  $\alpha = -1$  et  $\beta = -1$  : sommet  $s_1$  du pixel courant (en bas à gauche).

L'incrémentation du nombre de sommets ( $\Delta n_0(\mathcal{P}(p))$ ) est donnée par l'équation suivante :

$$\Delta n_0(\mathcal{P}(p)) = \sum_{\alpha, \beta = \pm 1} [\mathcal{Q}(i + \alpha, j) \times \mathcal{Q}(i + \alpha, j + \beta) \times \mathcal{Q}(i, j + \beta)] \quad (2.39)$$

Cette équation peut être décomposée en 4 termes (car 4 sommets par pixel) :

$$\Delta n_0(\mathcal{P}(p)) = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 \quad (2.40)$$

avec

$$\text{pour } \alpha = -1, \beta = -1 : s_1 = \mathcal{Q}(i-1, j) \times \mathcal{Q}(i-1, j-1) \times \mathcal{Q}(i, j-1) \quad (2.41)$$

$$\text{pour } \alpha = -1, \beta = +1 : s_2 = \mathcal{Q}(i-1, j) \times \mathcal{Q}(i-1, j+1) \times \mathcal{Q}(i, j+1) \quad (2.42)$$

$$\text{pour } \alpha = +1, \beta = -1 : s_3 = \mathcal{Q}(i+1, j) \times \mathcal{Q}(i+1, j-1) \times \mathcal{Q}(i, j-1) \quad (2.43)$$

$$\text{pour } \alpha = +1, \beta = +1 : s_4 = \mathcal{Q}(i+1, j) \times \mathcal{Q}(i+1, j+1) \times \mathcal{Q}(i, j+1) \quad (2.44)$$

Chaque terme teste la présence éventuelle d'un sommet en étudiant simultanément la valeur de 3 pixels (ce qui explique la présence d'un produit). En effet, dans une image 2D, un sommet est un élément géométrique commun à 4 pixels (le pixel courant et 3 de ses pixels 8-adjacents (équation 2.33))

Le premier terme de l'équation 2.39 est développé dans 2.41 (pour  $\alpha = -1$  et  $\beta = -1$ ). Ce premier terme revient à tester la présence du sommet  $s_1$  (d'après les notations de la figure 2.6).

Si les trois pixels 8-adjacents ( $\mathcal{P}(i-1, j)$ ,  $\mathcal{P}(i-1, j-1)$ ,  $\mathcal{P}(i, j-1)$ ) sont vides :  $s_1 = 1$ . Le sommet est comptabilisé et  $\Delta n_0(\mathcal{P}(p))$  est incrémenté de 1.

Si un seul de ces trois pixels est plein :  $s_1 = 0$ .  $\Delta n_0(\mathcal{P}(p))$  reste inchangé car le sommet a déjà été énuméré.

### 2.3.3 Algorithme de calcul des $n_m(\mathcal{P})$ en 3D

En 3D, considérons une image  $\mathcal{P}$  de taille  $L_x \times L_y \times L_z$ . Notons par  $\mathcal{P}(p)$  un voxel à la position  $p \in \mathbb{Z}^3$  de l'image, où  $p = (i, j, k)$  avec  $i = 1 \dots L_x$ ,  $j = 1 \dots L_y$  et  $k = 1 \dots L_z$ .

Par définition :

$$\mathcal{P}(p) = \begin{cases} 1 & \text{si le voxel est noir (objet)} \\ 0 & \text{si le voxel est blanc (fond)} \end{cases} \quad (2.45)$$

Nous définissons trois relations d'adjacence (voir figure 2.7) :

- deux voxels sont dits 6-adjacents s'ils sont voisins suivant 1 face.
- deux voxels sont dits 18-adjacents s'ils sont voisins suivant 1 face ou 1 arête.
- deux voxels sont dits 26-adjacents s'ils sont voisins suivant 1 face ou 1 arête ou 1 sommet.

Les nombres 6, 18 et 26 correspondent au nombre de voxels adjacents à un voxel donné pour le type d'adjacence choisi. Tout voxel a donc 3 types de voisins. On vérifie les relations suivantes :

- $(i, j, k)$  est 6-adjacent à  $(i', j', k')$  si et seulement si  $|i - i'| + |j - j'| + |k - k'| = 1$ .
- $(i, j, k)$  est 18-adjacent à  $(i', j', k')$  si et seulement si parmi les trois valeurs  $|i - i'|$ ,  $|j - j'|$ ,  $|k - k'|$ , une ou deux sont égales à 1, et l'(es) autre(s) égale(s) à 0.
- $(i, j, k)$  est 26-adjacent à  $(i', j', k')$  si et seulement si  $\max(|i - i'|, |j - j'|, |k - k'|) = 1$ .

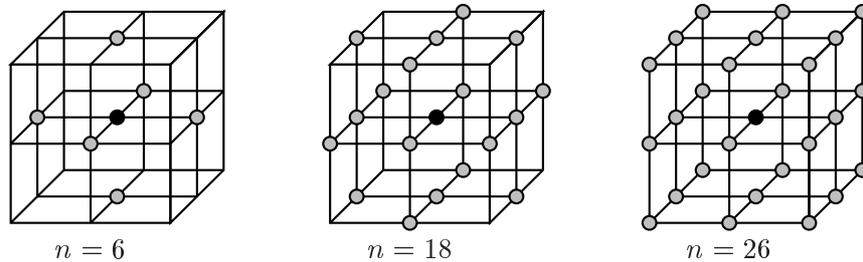


FIG. 2.7 – Relation d'adjacence en 3D : un voxel (noir) et ses voxels  $n$ -adjacents (gris)

L'incrémentation du nombre de cubes ouverts ( $\Delta n_3(\mathcal{P}(p))$ ) contenus dans une image  $\mathcal{P}$  lors de l'ajout d'un voxel noir  $\mathcal{P}(p)$  est donnée par l'équation suivante :

$$\Delta n_3(\mathcal{P}(p)) = 1 \quad (2.46)$$

Cette équation est composé d'un seul terme (car 1 cube ouvert par voxel). Cette équation est égale à 1 puisque dès qu'on ajoute un nouveau voxel noir, un nouveau cube ouvert doit être automatiquement compté.

L'incrémentation du nombre des faces ouvertes  $\Delta n_2(\mathcal{P}(p))$  est donné par l'équation suivante :

$$\Delta n_2(\mathcal{P}(p)) = \sum_{\alpha=\pm 1} [\mathcal{Q}(i + \alpha, j, k) + \mathcal{Q}(i, j + \alpha, k) + \mathcal{Q}(i, j, k + \alpha)] \quad (2.47)$$

avec :

$$\mathcal{Q}(p) = \begin{cases} 1 - \mathcal{P}(p) = 0 & \text{si } \mathcal{P}(p) \text{ est un voxel noir.} \\ 1 - \mathcal{P}(p) = 1 & \text{si } \mathcal{P}(p) \text{ est un voxel blanc.} \end{cases} \quad (2.48)$$

Cette équation peut être décomposée en 6 termes (car 6 faces ouvertes par voxel) :

$$\Delta n_2(\mathcal{P}(p)) = \mathcal{Q}(i-1, j, k) + \mathcal{Q}(i, j-1, k) + \mathcal{Q}(i, j, k-1) + \mathcal{Q}(i+1, j, k) + \mathcal{Q}(i, j+1, k) + \mathcal{Q}(i, j, k+1) \quad (2.49)$$

Chaque terme teste la présence éventuelle d'une face en s'intéressant à la valeur d'un seul voxel. En effet, dans une image binaire 3D, une face est un élément géométrique commun à deux voxels (le voxel courant et un de ses voxels 6-adjacents). Dès qu'un voxel 6-adjacent est plein,  $\Delta n_2(\mathcal{P}(p))$  reste inchangé.  $\Delta n_2(\mathcal{P}(p))$  pourra être incrémentée au plus de 6 si tous les voxels 6-adjacents sont vides.

L'incrémentation du nombre des arêtes ouvertes  $\Delta n_1(\mathcal{P}(p))$  est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \Delta n_1(\mathcal{P}) = \sum_{\alpha, \beta=\pm 1} [ & \mathcal{Q}(i + \alpha, j, k) \times \mathcal{Q}(i + \alpha, j + \beta, k) \times \mathcal{Q}(i, j + \beta, k) \\ & + \mathcal{Q}(i, j + \alpha, k) \times \mathcal{Q}(i, j + \alpha, k + \beta) \times \mathcal{Q}(i, j, k + \beta) \\ & + \mathcal{Q}(i + \alpha, j, k) \times \mathcal{Q}(i + \alpha, j, k + \beta) \times \mathcal{Q}(i, j, k + \beta)] \end{aligned} \quad (2.50)$$

Cette équation peut être décomposée en 12 termes (car 12 arêtes par voxel) :

$$\Delta n_1(\mathcal{P}(p)) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} \quad (2.51)$$

Pour  $\alpha=-1$  et  $\beta=-1$  :

$$a_1 = \mathcal{Q}(i-1, j, k) \times \mathcal{Q}(i-1, j-1, k) \times \mathcal{Q}(i, j-1, k) \quad (2.52)$$

$$a_2 = \mathcal{Q}(i, j-1, k) \times \mathcal{Q}(i, j-1, k-1) \times \mathcal{Q}(i, j, k-1) \quad (2.53)$$

$$a_3 = \mathcal{Q}(i-1, j, k) \times \mathcal{Q}(i-1, j, k-1) \times \mathcal{Q}(i, j, k-1) \quad (2.54)$$

Tous les termes  $a_i$  ( $i = 1..12$ ) sont donnés dans l'annexe 1.

Chaque terme  $a_i$  teste la présence éventuelle d'une arête en étudiant simultanément la valeur de 3 voxels (ce qui explique la présence d'un produit). En effet, dans une image 3D, une arête est un élément géométrique commun à 4 voxels (le voxel courant et 3 de ses voxels 18-adjacents).

Si les trois voxels 18-adjacents ( $\mathcal{P}(i-1, j, k)$ ,  $\mathcal{P}(i-1, j-1, k)$ ,  $\mathcal{P}(i, j-1, k)$ ) sont vides :  $a_1 = 1$ . L'arête est comptabilisée et  $\Delta n_1(\mathcal{P}(p))$  est incrémenté de 1.

Si un seul de ces trois voxels est plein :  $a_1 = 0$ .  $\Delta n_1(\mathcal{P}(p))$  reste inchangé car l'arête a déjà été énumérée.

L'incrémentation du nombre de sommets  $\Delta n_0(\mathcal{P}(p))$  est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \Delta n_0(\mathcal{P}) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma = \pm 1} [ & \mathcal{Q}(i + \alpha, j, k) \times \mathcal{Q}(i + \alpha, j + \beta, k) \times \mathcal{Q}(i, j + \beta, k) \\ & \times \mathcal{Q}(i + \alpha, j, k + \gamma) \times \mathcal{Q}(i + \alpha, j + \beta, k + \gamma) \\ & \times \mathcal{Q}(i, j + \beta, k + \gamma) \times \mathcal{Q}(i, j, k + \gamma)] \end{aligned} \quad (2.55)$$

Cette équation peut être décomposée en 8 termes (car 8 sommets par voxel) :

$$\Delta n_0(\mathcal{P}(p)) = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 + s_7 + s_8 \quad (2.56)$$

Pour  $\alpha=-1$  et  $\beta=-1$  et  $\gamma = -1$  :

$$\begin{aligned} s_1 = & \mathcal{Q}(i-1, j, k) \times \mathcal{Q}(i-1, j-1, k) \times \mathcal{Q}(i, j-1, k) \\ & \times \mathcal{Q}(i-1, j, k-1) \times \mathcal{Q}(i-1, j-1, k-1) \\ & \times \mathcal{Q}(i, j-1, k-1) \times \mathcal{Q}(i, j, k-1) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Tous les termes  $s_i$  ( $i = 1..8$ ) sont donnés dans l'annexe 2.

Chaque terme  $s_i$  teste la présence éventuelle d'un sommet en étudiant simultanément la valeur de 7 voxels (ce qui explique la présence d'un produit). En effet, dans une image 3D, un sommet est un élément géométrique commun à 8 voxels (le voxel courant et 7 de ses voxels 26-adjacents).

Pour qu'un sommet soit comptabilisé, il faut que les 7 voxels 26-adjacents (qui partagent ce sommet) soient vides.

### 2.3.4 Limites de l'algorithme de Michielsen et De Raedt

En 3D, le dénombrement des éléments géométriques de base requiert, dans [5], d'examiner tous les voxels 26-adjacents pour pouvoir calculer les fonctions discrètes à variables booléennes établies précédemment pour  $\Delta n_3$  (éq. 2.46),  $\Delta n_2$  (éq. 2.47),  $\Delta n_1$  (éq. 2.50) et  $\Delta n_0$  (éq. 2.55).

La solution proposée ici a deux inconvénients. Le premier point concerne l'algorithme lui-même, et plus particulièrement le nombre de voxels voisins à explorer. Tous les 26 voisins du voxel courant doivent être examinés pour pouvoir résoudre les équations. Le second point concerne l'implémentation de l'algorithme. Deux tableaux sont utilisés : le premier pour stocker toute l'image 3D à analyser, l'autre pour traiter l'image 3D en cours d'analyse (il est rempli voxel par voxel), ce qui est coûteux en mémoire et en temps d'accès. Pour limiter le nombre d'accès aux voisins d'un voxel courant et supprimer l'utilisation de deux tableaux, nous allons étudier l'algorithme présenté par Blasquez et Poiraudé dans [6].

### 2.3.5 Algorithme amélioré de calcul des $n_m(\mathcal{P})$ en 3D

#### 2.3.5.1 Introduction

Pour les besoins de leur algorithme, les auteurs ont décomposé la matrice de voxels en plans. Ils ont considéré que cette matrice serait parcourue en colonne de gauche à droite, en ligne de bas en haut, et d'un plan

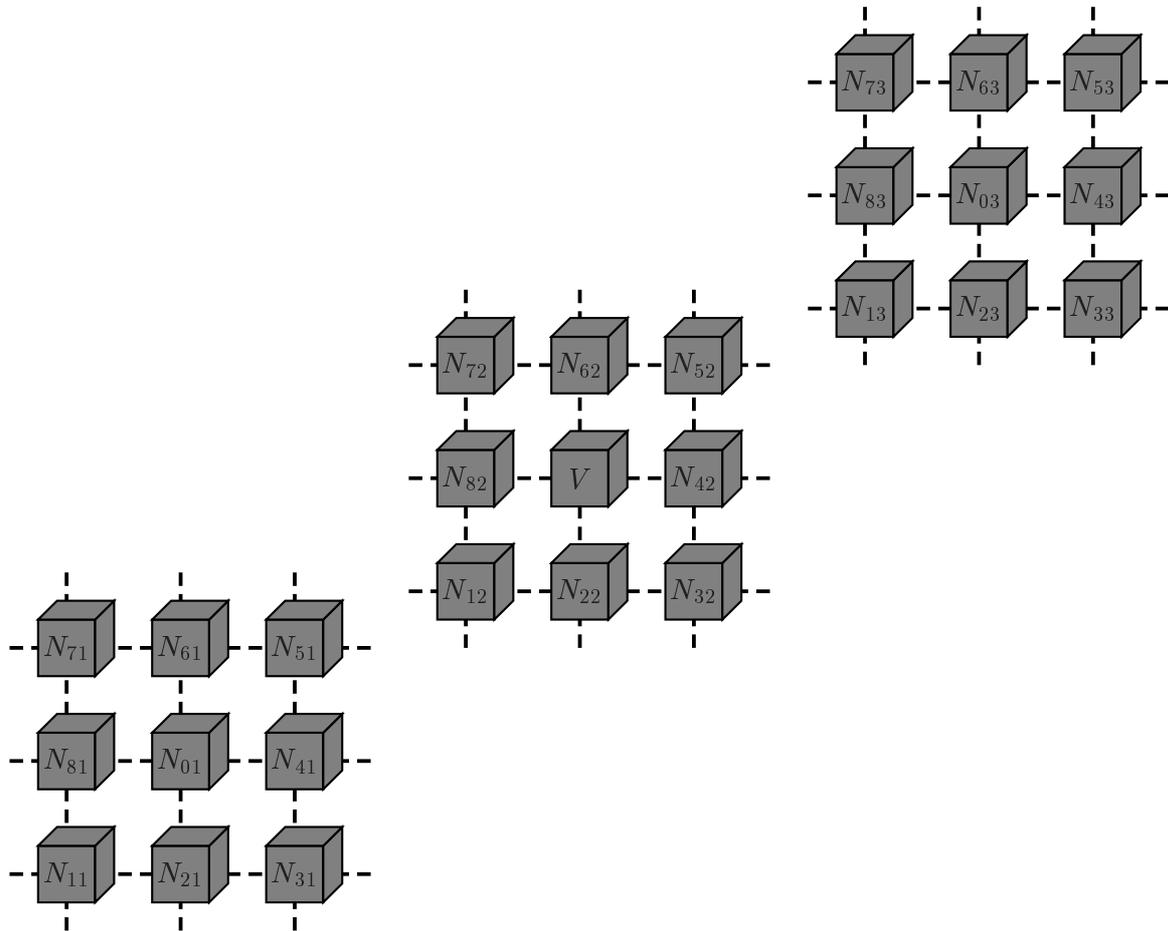


FIG. 2.8 – Représentation des 26 voxels voisins pour l’algorithme amélioré

en avant de l’image vers un plan en arrière. Pour une manipulation plus aisée des variables dans les équations discrètes, ils ont utilisés les notations de la Figure 2.8. Dans cette figure la configuration locale autour d’un voxel courant noté  $V$  est représentée par une sous-matrice. Les voxels 26-adjacents sont notés  $N_{ip}$  où  $i$  indique la position du voxel dans le plan ( $0 \leq i \leq 8$ ) et  $p$  indique le plan dans lequel se situe le voxel 26-adjacent considéré (1 : plan avant, 2 : plan courant, 3 : plan arrière). La valeur de  $N_{ip}$  indique également la présence éventuelle du voxel considéré :

$$N_{ip} = \begin{cases} 1 & \text{si le voxel est noir (objet)} \\ 0 & \text{si le voxel est blanc (fond)} \end{cases} \quad (2.58)$$

Nous pouvons également définir  $Q_{ip}$  :

$$Q_{ip} = \begin{cases} 1 - N_{ip} = 0 & \text{si le voxel est noir (objet)} \\ 1 - N_{ip} = 1 & \text{si le voxel est blanc (fond)} \end{cases} \quad (2.59)$$

Nous pouvons remarquer que  $N_{ip}$  dans cet algorithme est l'équivalent de  $\mathcal{P}(p)$  utilisé dans les équations de l'algorithme précédent (2.46, 2.47, 2.50 et 2.55). En effet, le problème reste le même : pour chaque nouveau voxel courant plein  $V$ , il faut déterminer le nombre de faces ouvertes ( $\Delta n_2$ ), d'arêtes ouvertes ( $\Delta n_1$ ), et de sommets ( $\Delta n_0$ ) introduit par l'ajout de ce voxel dans la matrice. Le nombre de cube ouvert ( $\Delta n_3$ ) étant égal à 1 (éq. 2.46).

### 2.3.5.2 Réduction du problème

La première simplification consiste à n'examiner que les 13 voxels voisins précédant le voxel courant plein ( $N_{i1}$  pour  $i = 0..8$ ,  $N_{j2}$  pour  $j = 1, 2, 3, 8$ ). En effet, en considérant que les voxels noirs sont ajoutés un à un suivant le sens de parcours de la matrice définie précédemment, les 13 voxels suivants sont considérés comme des voxels vides (il seront examinés à leur tour dans la suite du parcours de la matrice) :

$$\begin{aligned} N_{i3} &= 0 & \text{pour } i &= 0..8 \\ N_{j2} &= 0 & \text{pour } j &= 4, 5, 6, 7 \end{aligned} \quad (2.60)$$

ou encore

$$\begin{aligned} Q_{i3} &= 1 & \text{pour } i &= 0..8 \\ Q_{j2} &= 1 & \text{pour } j &= 4, 5, 6, 7 \end{aligned} \quad (2.61)$$

En tenant compte de ces nouvelles valeurs, les équations (2.46, 2.47, 2.50 et 2.55) deviennent :  
Pour l'incrémement du nombre de faces ouvertes :

$$\Delta n_2 = 3 + Q01 + Q22 + Q82 \quad (2.62)$$

Pour l'incrémement du nombre d'arêtes ouvertes :

$$\begin{aligned} \Delta n_1 = 3 + Q01.Q22.Q21 + Q01.Q41 + Q01.Q61 + Q01.Q82.Q21 + Q22.Q32 + \\ Q82 + Q12.Q22.Q82 + Q22 + Q82 \end{aligned} \quad (2.63)$$

Pour l'incrémement du nombre de sommets :

$$\begin{aligned} \Delta n_0 = 1 + Q82 + Q22.Q32 + Q12.Q22.Q82 + Q01.Q41.Q51.Q61 + Q81.Q01.Q61.Q71.Q82 \\ + Q21.Q31.Q41.Q01.Q22.Q32 + Q11.Q21.Q01.Q81.Q12.Q22.Q82 \end{aligned} \quad (2.64)$$

Le nombre de variables booléennes inconnues est donc réduit à 13. Un nouveau voxel courant plein amènera toujours au dénombrement au moins : 3 faces ouvertes, 3 arêtes ouvertes et 1 sommet. Le nombre maximal de faces ouvertes susceptibles d'être rajouté est 3, ce qui correspond au nombre de  $Q_{ip}$  restants dans l'équation 2.62. Le nombre maximal d'arêtes ouvertes susceptibles d'être rajouté est 9, ce qui correspond au nombre de termes restants dans l'équation 2.63. Le nombre maximal de sommets susceptibles d'être rajouté est 7, ce qui correspond au nombre de termes restants dans l'équation 2.64.

### 2.3.5.3 Implémentation : utilisation d'un triple-ADD

En s'appuyant sur [7], une approche à base de Diagrammes de Decision Binaires (DDB) (*Binary Decision Diagrams*) a été proposé pour implémenter la résolution des 3 équations réduites ( 2.62, 2.63, 2.64).

Les DDBs sont une représentation compacte et efficace pour la manipulation symbolique des fonctions booléennes. Leur concept a été introduit par Lee et Akers [8]. Les variables booléennes peuvent prendre les valeurs dans  $\mathbb{B} = \{0,1\}$ . Un diagramme de decision binaire (DDB) représente une fonction booléenne  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$  comme un graphe acyclique direct dans lequel chaque noeud est soumis à un test d'une variable booléenne  $x_i$  (représentation de Shannon) :  $f = \bar{x}_i f_{x_i=0} + x_i f_{x_i=1}$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Chaque noeud a deux fils qui sont eux aussi des DDBs. A chaque noeud, un des fils est choisi en fonction de la valeur de la variable représentée associée à ce noeud. La valeur de la fonction est déterminée en traversant le graphe à partir de la racine jusqu'à un noeud terminal. Les DDBs n'ont été réellement développés qu'à la suite de la publication d'un article de Bryant [9] qui définit alors les diagrammes de décision binaires ordonnés (*OBDD : Ordered Binary Decision Diagrams*) comme un sous-ensemble des DDBs. Les OBDDs sont des DDBs dans lesquels les variables sont strictement ordonnées à partir de la racine jusqu'aux terminaux. Un *OBDD* qui est sous forme canonique est aussi appelé diagramme de décision binaire ordonné réduit (*ROBDD*).

Dans [7], Robert et Malandain proposaient d'utiliser les ROBDDs pour des techniques classiques de traitement d'image qui dépendent d'une seule fonction booléenne à variable booléenne. Comme nous travaillons sur 3 fonctions discrètes à variables booléennes ( $\Delta n_2, \Delta n_1, \Delta n_0$ ), l'algorithme amélioré propose l'utilisation d'un ADD adapté à ce problème. Les *ADDs* (*Algebraic Decision Diagrams*) comme les *MTBDDs* (*Multi-Terminal BDD*) [10] sont des structures dérivées des DDBs dans lesquelles les noeuds terminaux représentent des valeurs numériques arbitraires dans  $\mathbb{Z}$  et non plus restreintes à  $\mathbb{B}$ . Un ADD représente une fonction discrète  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  où chaque noeud est soumis à un test d'une variable booléenne  $x_i$ .

Pour accélérer l'algorithme, le critère consistant à minimiser le nombre d'accès à une image devait être satisfait. Un seul ADD a donc été implémenté pour résoudre simultanément les 3 fonctions discrètes. Cette nouvelle structure de données a été appelée : *triple-ADD*. Chaque noeud terminal de ce triple-ADD n'incrémente plus une seule équation discrète, mais trois. L'ordre de branchement a été choisi de telle sorte qu'à chaque test, le plus grand nombre d'éléments géométriques soit éliminé. Pour cela, il a été nécessaire de faire appel à la topologie discrète, et notamment aux relations d'adjacence entre voxel pour arrêter les tests dès qu'un élément géométrique a déjà été partagé par un voxel voisin. Un voxel 6-adjacent au voxel courant  $V$  par 1 face élimine immédiatement 1 face, 4 arêtes et 4 sommets. C'est le cas de N01, N22 et N82. La fréquence d'apparition de tels voxels est de 1 fois pour  $\Delta n_2$ , 4 pour  $\Delta n_1$  et 4 pour  $\Delta n_0$ . Un voxel 18-adjacent à  $V$  par 1 arête élimine immédiatement 1 arête et 2 sommets. C'est le cas de N21, N81, N41, N61, N12 et N32. Un voxel 26-adjacent à  $V$  par 1 sommet élimine 1 sommet. C'est le cas de N11, N31, N71 et N51.

Les premiers tests sont effectués sur les voxels 6-adjacents, puis 18-adjacents, et enfin 26-adjacents. Les voxels de même connexité sont ordonnés en fonction du sens de parcours de la matrice. L'ordre de présentation des 13 variables booléennes pour le triple-ADD est donc le suivant : N01 < N22 < N82 < N21 < N81 < N41 < N61 < N12 < N32 < N11 < N31 < N71 < N51.

Le début du triple-ADD est représenté sur la figure 2.9. Par exemple, si les 3 voxels 6-adjacents sont pleins, il n'est pas nécessaire de continuer les tests après avoir analysé la valeur de ces voxels ( $Q01=Q22=Q82=0$ ).  $\Delta n_2$  reste égal à 3,  $\Delta n_1$  reste égal à 3 et  $\Delta n_0$  reste égal à 1. Cet algorithme est 17 fois plus rapide que l'algorithme de base.

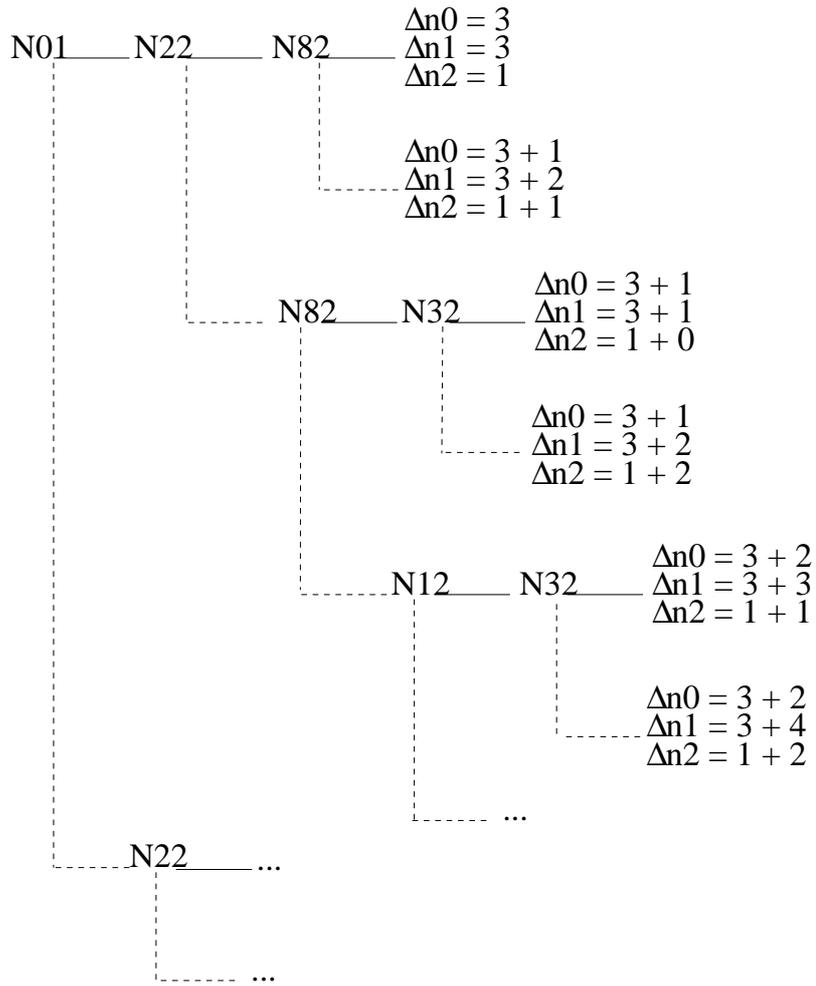


FIG. 2.9 – Début du triple-ADD

# Conclusion

En effectuant ce stage, nous avons tiré pleinement profit des connaissances acquises dans le domaine de la caractérisation morphologique de formes 3D discrètes à l'aide des fonctionnelles de Minkowski. Ceci nous a permis de percevoir la nécessité de ces méthodes dans le domaine de la géométrie intégrale. Le calcul des fonctionnelles de Minkowski sur une image binaire 2D (3D) se fait grâce à l'énumération des éléments géométriques de base. Dans la littérature, deux algorithmes ont été proposés pour pouvoir dénombrer ces éléments géométriques. Après avoir étudié l'algorithme de base et l'algorithme amélioré du triple-ADD, on a déduit que l'algorithme amélioré permet de dénombrer efficacement les faces ouvertes, arêtes ouvertes et les sommets d'un objet 3D discrétisé. Cet algorithme est 17 fois plus rapide que l'algorithme de base car il utilise des arbres binaires de décision et prend en considération des conditions topologiques.



# Annexe 1 : Termes $a_j$ de l'équation $\Delta n_1$ en 3D

En 3D, l'incrémentation du nombre des arêtes ouvertes  $\Delta n_1(\mathcal{P}(p))$  est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \Delta n_1(\mathcal{P}) &= \sum_{\alpha, \beta = \pm 1} [ \mathcal{Q}(i + \alpha, j, k) \times \mathcal{Q}(i + \alpha, j + \beta, k) \times \mathcal{Q}(i, j + \beta, k) \\ &\quad + \mathcal{Q}(i, j + \alpha, k) \times \mathcal{Q}(i, j + \alpha, k + \beta) \times \mathcal{Q}(i, j, k + \beta) \\ &\quad + \mathcal{Q}(i + \alpha, j, k) \times \mathcal{Q}(i + \alpha, j, k + \beta) \times \mathcal{Q}(i, j, k + \beta) ] \end{aligned} \quad (2.65)$$

Cette équation peut être décomposée en 12 termes :

$$\Delta n_1(\mathcal{P}(p)) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} \quad (2.66)$$

Pour  $\alpha=-1$  et  $\beta=-1$  :

$$a_1 = \mathcal{Q}(i - 1, j, k) \times \mathcal{Q}(i - 1, j - 1, k) \times \mathcal{Q}(i, j - 1, k) \quad (2.67)$$

$$a_2 = \mathcal{Q}(i, j - 1, k) \times \mathcal{Q}(i, j - 1, k - 1) \times \mathcal{Q}(i, j, k - 1) \quad (2.68)$$

$$a_3 = \mathcal{Q}(i - 1, j, k) \times \mathcal{Q}(i - 1, j, k - 1) \times \mathcal{Q}(i, j, k - 1) \quad (2.69)$$

Pour  $\alpha=-1$  et  $\beta=1$  :

$$a_4 = \mathcal{Q}(i - 1, j, k) \times \mathcal{Q}(i - 1, j + 1, k) \times \mathcal{Q}(i, j + 1, k) \quad (2.70)$$

$$a_5 = \mathcal{Q}(i, j - 1, k) \times \mathcal{Q}(i, j - 1, k + 1) \times \mathcal{Q}(i, j, k + 1) \quad (2.71)$$

$$a_6 = \mathcal{Q}(i - 1, j, k) \times \mathcal{Q}(i - 1, j, k + 1) \times \mathcal{Q}(i, j, k + 1) \quad (2.72)$$

Pour  $\alpha=1$  et  $\beta=-1$  :

$$a_7 = \mathcal{Q}(i + 1, j, k) \times \mathcal{Q}(i + 1, j - 1, k) \times \mathcal{Q}(i, j - 1, k) \quad (2.73)$$

$$a_8 = \mathcal{Q}(i, j + 1, k) \times \mathcal{Q}(i, j + 1, k - 1) \times \mathcal{Q}(i, j, k - 1) \quad (2.74)$$

$$a_9 = \mathcal{Q}(i + 1, j, k) \times \mathcal{Q}(i + 1, j, k - 1) \times \mathcal{Q}(i, j, k - 1) \quad (2.75)$$

Pour  $\alpha=1$  et  $\beta=1$  :

$$a_{10} = \mathcal{Q}(i + 1, j, k) \times \mathcal{Q}(i + 1, j + 1, k) \times \mathcal{Q}(i, j + 1, k) \quad (2.76)$$

$$a_{11} = \mathcal{Q}(i, j + 1, k) \times \mathcal{Q}(i, j + 1, k + 1) \times \mathcal{Q}(i, j, k + 1) \quad (2.77)$$

$$a_{12} = \mathcal{Q}(i + 1, j, k) \times \mathcal{Q}(i + 1, j, k + 1) \times \mathcal{Q}(i, j, k + 1) \quad (2.78)$$



## Annexe 2 : Termes $s_j$ de l'équation $\Delta n_0$ en 3D

En 3D, l'incrémentation du nombre de sommets  $\Delta n_0(\mathcal{P}(p))$  est donnée par l'équation suivante :

$$\Delta n_0(\mathcal{P}) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma = \pm 1} [ \mathcal{Q}(i + \alpha, j, k) \times \mathcal{Q}(i + \alpha, j + \beta, k) \times \mathcal{Q}(i, j + \beta, k) \\ \times \mathcal{Q}(i + \alpha, j, k + \gamma) \times \mathcal{Q}(i + \alpha, j + \beta, k + \gamma) \\ \times \mathcal{Q}(i, j + \beta, k + \gamma) \times \mathcal{Q}(i, j, k + \gamma) ] \quad (2.79)$$

Cette équation peut être décomposée en 8 termes :

$$\Delta n_0(\mathcal{P}(p)) = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 + s_7 + s_8 \quad (2.80)$$

Pour  $\alpha=-1$  et  $\beta=-1$  et  $\gamma = -1$  :

$$s_1 = \mathcal{Q}(i - 1, j, k) \times \mathcal{Q}(i - 1, j - 1, k) \times \mathcal{Q}(i, j - 1, k) \\ \times \mathcal{Q}(i - 1, j, k - 1) \times \mathcal{Q}(i - 1, j - 1, k - 1) \\ \times \mathcal{Q}(i, j - 1, k - 1) \times \mathcal{Q}(i, j, k - 1) \quad (2.81)$$

Pour  $\alpha=-1$  et  $\beta=-1$  et  $\gamma = 1$  :

$$s_2 = \mathcal{Q}(i - 1, j, k) \times \mathcal{Q}(i - 1, j - 1, k) \times \mathcal{Q}(i, j - 1, k) \\ \times \mathcal{Q}(i - 1, j, k + 1) \times \mathcal{Q}(i - 1, j - 1, k + 1) \\ \times \mathcal{Q}(i, j - 1, k + 1) \times \mathcal{Q}(i, j, k + 1) \quad (2.82)$$

Pour  $\alpha=-1$  et  $\beta=1$  et  $\gamma = 1$  :

$$s_3 = \mathcal{Q}(i - 1, j, k) \times \mathcal{Q}(i - 1, j + 1, k) \times \mathcal{Q}(i, j + 1, k) \\ \times \mathcal{Q}(i - 1, j, k + 1) \times \mathcal{Q}(i - 1, j + 1, k + 1) \\ \times \mathcal{Q}(i, j + 1, k + 1) \times \mathcal{Q}(i, j, k + 1) \quad (2.83)$$

Pour  $\alpha=1$  et  $\beta=-1$  et  $\gamma = -1$  :

$$s_4 = \mathcal{Q}(i + 1, j, k) \times \mathcal{Q}(i + 1, j - 1, k) \times \mathcal{Q}(i, j - 1, k) \\ \times \mathcal{Q}(i + 1, j, k - 1) \times \mathcal{Q}(i + 1, j + \beta, k - 1) \\ \times \mathcal{Q}(i, j + \beta, k - 1) \times \mathcal{Q}(i, j, k - 1) \quad (2.84)$$

Pour  $\alpha=1$  et  $\beta=-1$  et  $\gamma = 1$  :

$$s_5 = \mathcal{Q}(i + 1, j, k) \times \mathcal{Q}(i + 1, j - 1, k) \times \mathcal{Q}(i, j - 1, k) \\ \times \mathcal{Q}(i + 1, j, k + 1) \times \mathcal{Q}(i + 1, j - 1, k + 1) \\ \times \mathcal{Q}(i, j - 1, k + 1) \times \mathcal{Q}(i, j, k + 1) \quad (2.85)$$

Pour  $\alpha=1$  et  $\beta=1$  et  $\gamma = 1$  :

$$\begin{aligned} s_6 = & \mathcal{Q}(i+1, j, k) \times \mathcal{Q}(i+1, j+1, k) \times \mathcal{Q}(i, j+1, k) \\ & \times \mathcal{Q}(i+1, j, k+1) \times \mathcal{Q}(i+1, j+1, k+1) \\ & \times \mathcal{Q}(i, j+1, k+1) \times \mathcal{Q}(i, j, k+1) \end{aligned} \quad (2.86)$$

# Bibliographie

- [1] P.J. FLYNN, A. HOOVER, and P.J. PHILLIPS. Special issue on empirical evaluation of computer vision algorithms. *Computer Vision and Image Understanding*, 84 :1–4, 2001.
- [2] J. SERRA. *Image analysis and mathematical morphology*. Academic Press Inc, London 1982.
- [3] A.S. SZALAY, J. GRAY, and J. VANDENBERG. Petabyte scale data mining : dream or reality. *Proc. SPIE Conference on Advanced Telescope Technologies*, 4836, August 2002, Hawaii.
- [4] K. MICHIELSEN and H. DE RAEDT. Aspects of integral-geometry. *Advances in Imaging and Electron Physics*, 125, Academic Press, 2002.
- [5] K. MICHIELSEN and H. DE RAEDT. Morphological image analysis. *Computer Physics Communications*, 132 :94–103, 2000.
- [6] I. BLASQUEZ and J.-F. POIRAUDEAU. Efficient processing of minkowski functionals on a 3d binary image using binary decision diagrams. *Journal of WSCG*, 11(1), 2003.
- [7] L. ROBERT and G. MALANDAIN. Fast binary image processing using binary decision diagrams. *Computer Vision and Image Understanding*, 72(1) :1–9, October 1998.
- [8] C.Y. LEE. Representing of switching functions by binary decision programs. *Bell Systems Technical Journal*, 38 :985–999, 1959.
- [9] R.E. BRYANT. Symbolic boolean operation with ordered binary decision diagrams. *ACM Computing Surveys*, 24(3) :293–317, September 1992.
- [10] R.I. BAHAR, E.A. FROHM, C.M. GAONA, G.D. HACHTEL, E. MACH, A. PARDO, and F. SOMENZI. Algebraic Decision Diagrams and Their Applications. *Proc. ACM/IEEE International Conference on CAD*, pages 188–191, 1993.